РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР «ШЫҒЫС»
УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКОЙ ОБЛАСТИ

# ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическое пособие
курса по выбору для 5-9 классов

УСТЬ-КАМЕНОГОРСК
2014

**51(075.3)**
**Ф 94**

Рекомендовано к изданию решением экспертного совета РЦ «Шығыс» управления образования ВКО (протокол №5 от 20 марта 2014 года).

«Функциональная математика». Методическое пособие курса по выбору для 5-9 классов. Усть-Каменогорск, РЦ «Шығыс» управления образования ВКО, 2014.-92 стр.

Рецензенты:
М. Мадияров , к.т.н., заведующий кафедрой математики ВКГУ имени С. Аманжолова.
Етекбаева Б.У., методист РЦ «Шығыс» управления образования ВКО.

Составители - творческая группа учителей математики города Усть-Каменогорска:
Нурпеисова А.З., методист ГМК; Петруха А.Ю., Ахмеровская средняя школа; Парфенова И.В., Казахстанско-Российская гимназия; Керимова И.Б. , средняя школа №7; Касенова Г.Т., средняя школа № 45; Сахариева Б.М., школа-гимназия №3; Таенова Р.М., школа-гимназия №10; Уалкенова К., средняя школа № 32; Веричева Е.В., средняя школа №4; Актанова Л.К., средняя школа № 27; Чултукова Ж.С.,средняя школа № 45.

Данное методическое пособие курса по выбору «Функциональная математика» составлено в помощь учителям математики для проведения вариативных часов школьного и ученического компонентов в 5-9 классах.

В пособие включены программы курса по выбору «Функциональная математика» для 5-9 классов и дидактические материалы к ним.

Содержание отражает широкие возможности математики в вопросе формирования функциональной грамотности школьников - развитие логического мышления, углубление знаний по сквозным темам, вариативный подход к решению задач, применение математических знаний в жизненных ситуациях и других учебных дисциплинах.

# I. ПРОГРАММЫ КУРСА ПО ВЫБОРУ «ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

## Пояснительная записка

В Национальном плане действий на 2012-2016 годы по развитию функциональной грамотности школьников перед учреждениями образования поставлена цель: повышение качества образовательных услуг, развитие функциональной грамотности школьников. Отмечено, что по результатам анализа международных исследований TIMSS и PISA учителя дают хорошие предметные знания, но не учат использовать их в жизненных ситуациях. Результатом развития функциональной грамотности является овладение учащимися системой ключевых компетенций.

Основной особенностью современного развития математического образования является ориентация на широкую дифференциацию обучения математики. Необходимо обеспечить базовую математическую подготовку, сформировать у учащихся устойчивый интерес к предмету, выявить и развить их математические способности, ориентировать на профессии связанные с математикой, подготовить к дальнейшей жизни. Практическая полезность дисциплины математика обусловлена тем, что её предметом являются фундаментальные структуры реального мира. В связи с этим вводится курс «Функциональная математика».

Данный курс предназначен для отработки навыков решения, повышению вычислительной культуры учащихся, развитию мыслительных способностей, способствует самоопределению учащихся при переходе к профильному обучению. Его содержание можно варьировать с учетом склонностей, интересов, уровня подготовленности детей, а также совмещать с другими формами внеклассной работы по математике.

Основными целями курса являются: привитие интереса учащихся к математике, углубление и расширение знаний учащихся по предмету, формирование и развитие умений решать нестандартные задачи, развитие функциональной грамотности учащихся.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие *задачи:*

-развивать математический кругозор, исследовательские умения учащихся;

-развивать логику, сообразительность, интуицию, пространственное воображение, математическое мышление;

-выработать у учащихся навыки применения математических знаний в жизненных ситуациях;

-вазвивать ключевые и предметные компетенции;

-развивать функциональную грамотность через формирование учебно-познавательной компетенции;

-развивать творческие способности одаренных учащихся;

-обеспечить качественную подготовку школьников к участию в олимпиадах и конкурсах разного уровня;

-формировать умения переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других областей.

Курс, с одной стороны, поддерживает изучение основного курса математики, направлен на систематизацию знаний, в том числе и методов обоснований (методов решения задач), реализацию внутрипредметных связей, способствует лучшему освоению базового курса математики, а с другой — служит для внутрипрофильной дифференциации и построения индивидуального образовательного пути, для раскрытия основных закономерностей построения математической теории, направлен на рассмотрение фундаментальных понятий математики, способов конструирования локальных математических теорий, самостоятельной деятельности по построению микроисследований. Как один из результатов его освоения может быть осознанный выбор дальнейшего образовательного профиля, а также профессиональной деятельности в области теоретической или прикладной математики.

Проведение занятий по программе курса предполагает использование широкого спектра методических средств. Для реализации содержания обучения по данной программе все теоретические положения дополняются и закрепляются решением задач. В качестве задач и упражнений рассматриваются примеры и ситуации из самых разных областей человеческой деятельности Навыки, приобретенные при решении, помогут учащимся анализировать и овладевать многообразной информацией, с которой они встретятся при изучении различных наук, успешно преодолевать трудности. Предполагается применение таких методов обучения как эвристическая беседа, проблемное изложение материала, осуществление принципа индивидуализации в форме дифференцированных заданий, а также использование различных технологий.

Курс «Функциональная математика» рассчитан на 34 часа в год (1 час в неделю). Учителю предложено примерное календарное планирование.

## Содержание программы 5 класса

*I. Приемы быстрых вычислений (2 часа)*. Различные приемы рациональных вычислений, позволяющие оптимизировать нахождение значений выражений.

*Цель:* показать учащимся приемы быстрых вычислений, способствовать развитию вычислительных умений учащихся.

Рекомендуется включать задания устного счета, задания на освоение приемов быстрых вычислений во все последующие занятия.

*II. Арифметические ребусы (2 часа)*. Задания на нахождение закономерностей, восстановление первоначальной записи примера, в котором часть цифр или все цифры заменены звездочками или буквами, на расстановку знаков, чтобы получить число, нахождение количества способов записи числа в виде суммы, на нахождение какой цифрой или сколькими нулями заканчивается запись числа и т.д.

*Цель:* способствовать развитию вычислительных умений, умений применять знания в нестандартной ситуации, логического мышления, наблюдательности, внимания.

*III. Задачи на движение (4 часа)*. Традиционный тип задач школьного курса, при этом содержащий много интересных задач, выходящих за рамки школьной программы: задачи на движение по и против течения реки, движение по эскалатору, среднюю скорость и т. д.

*Цель*: способствовать развитию умений решать задачи на совместное движение, движение по и против течения реки, движение по эскалатору, среднюю скорость и другие, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать.

*IV. «Коварные» проценты (3 часа.)* Еще один традиционный тип задач школьного курса. Задачи на процентное содержание, нахождение процентов от процентов и другие нестандартные задачи.

*Цель:* способствовать развитию умений решать задачи на проценты, умений применять знания в нестандартной ситуации, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать.

*V. Логические задачи (9 часов)*. Задачи логического характера: на переливание, взвешивание, календаре, возрасте, времени, задачи, решаемые логическими таблицами, комбинаторные задачи, решаемые методом перебора различных вариантов, и другие нестандартные задачи.

*Цель*: способствовать развитию умений решать логические задачи, умений применять знания в нестандартной ситуации, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать; создать условия для развития способностей одаренных детей, подготовки учащихся к успешному выступлению на олимпиадах.

*VI. Практико-ориентированные задачи (7 часов)*. Задачи, которые раскрывают приложения математики в окружающей нас действительности, в смежных дисциплинах, знакомят с ее использованием в технологии и экономике современного производства, в сфере обслуживания, в быту, при выполнении трудовых операций. Способы представления статистических данных. Работа с таблицами, диаграммами.

Можно предложить школьникам просчитать свой семейный бюджет, составить калькуляцию (смету) и определить, сколько денег надо семье тратить на питание в месяц, предоставив таблицы: «Норма продуктов питания», «Средняя калорийность продуктов», вычисление калорийности блюда, количества рулонов обоев, краски, оплаты за коммунальные услуги, концентрации и другие; задачи на совместную работу, практические работы на вычисление средней длины шага, измерение расстояния различными способами: с помощью рулетки или портняжного метра, шагами, скоростью движения и т.д.

*Цель:* показать многообразие применения математики в жизни, способствовать развитию функциональной грамотности.

*VII. Геометрические головоломки (2 часа).* Задачи со спичками, на разрезание, складывание, на перекраивание, нахождение площадей, геометрические иллюзии, лабиринты и т.д.

*Цель:* способствовать развитию «геометрической зоркости», внимания, наблюдательности, развитию навыков экспериментального исследования.

*Решение задач с помощью уравнений (5 часов).* При решении задач этого раздела, рекомендуется обращать особое внимание на обязательное пояснение (текстовое или в виде таблицы), в некоторых задачах нацеливать только на составление уравнения, если решение выходит за рамки программы, учить использовать способ подбора корня уравнения, выраженного натуральным числом, применяя разложение на множители.

*Цель*: способствовать развитию умений решать задачи с помощью уравнений, развитию логического мышления, математической речи.

## Календарно-тематическое планирование

(в неделю-1 час, всего -34 часов)

| № урока | Содержание | Кол-во часов | Образовательный продукт | Дидактическое обеспечение |
|---|---|---|---|---|
| 1,2 | Приемы быстрых вычислений | 2 | Составить 5-6 примеров на устный счет на разные приемы | Авторское электронное пособие Самойловой Г.А. |
| 3,4 | Арифметические ребусы | 2 | Подборка ребусов | |
| | *Решение задач с помощью уравнений* | 3 | | |
| 5-7 | Решение задач с помощью уравнений | 3 | Образцы решения | |
| | *Логические задачи* | 7 | | |
| 8 | Комбинаторные задачи, решаемые методом перебора различных вариантов | 1 | Образцы решения | |
| 9 | Взвешивание | 1 | Образцы решения | |
| 10,11 | Переливание | 2 | Образцы решения | |
| 12,13 | Задачи, решаемые с помощью таблиц истинности | 2 | Образцы решения | |
| 14 | «Правдолюбцы и лжецы» | 1 | Образцы решения | |
| | *Практико-ориентированные* | 2 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *задачи* | | | |
| 15,16 | Практико-ориентированные задачи на действия с натуральными числами, обыкновенными дробями. | 2 | Составить задачи по теме | |
| | *Логические задачи* | *2* | | |
| 17 | Календарь, возраст, время | 1 | Образцы решения | |
| 18 | Аликвотные дроби. | 1 | Образцы решения | |
| | *Геометрические головоломки* | 2 | Минипроект. Создание базы заданий теме | |
| 19,20 | Геометрические головоломки | 2 | | |
| | *Практико-ориентированные задачи* | 2 | | |
| 21,22 | Практико-ориентированные задачи. Задачи на совместную работу. | 2 | Минипроект. Создание базы заданий теме | |
| | *Задачи на движение* | 4 | | |
| 23 | Задачи на движение встречное и в противоположных направлениях | 1 | Алгоритмы, схемы решений | |
| 24 | Задачи на одностороннее движение (вдогонку и отставание) | 1 | | |
| 25 | Задачи на различные виды совместного движения | 1 | | |
| 26 | Задачи олимпиадного характера на движение | 1 | | |
| | *Практико-ориентированные задачи* | 1 | | |
| 27 | Практико-ориентированные задачи на действия с десятичными дробями | 1 | Составить задачи по теме | |
| | *Решение задач с помощью уравнений* | 2 | | |
| 28,29 | Решение задач с помощью уравнений | 2 | Образцы решения | |
| | *«Коварные» проценты* | 3 | | |
| 30-32 | Задачи на проценты | 3 | Образцы решения | |
| | *Практико-ориентированные задачи* | 2 | | |
| 33,34 | Способы представления статистических данных. Таблицы, диаграммы. | 2 | Реферат | |

В результате изучения курса*, учащиеся должны уметь:*

-решать и составлять некоторые математические ребусы, головоломки, зашифрованные примеры;

-решать несложные логические задачи олимпиадного характера;

-решать задачи на движение, проценты, задачи на составление уравнений;

-решать несложные геометрические головоломки;

-решать отдельные практико-ориентированные задачи.

## Содержание программы 6 класса

*I. Приемы быстрых вычислений (1 час).* Различные приемы рациональных вычислений, позволяющие оптимизировать нахождение значений выражений. Рекомендуется включать задания устного счета, задания на освоение приемов быстрых вычислений во все последующие занятия.

*Цель:* показать учащимся приемы быстрых вычислений, способствовать развитию вычислительных умений учащихся.

*II. Практико-ориентированные задачи (3 часа).* Задачи, которые раскрывают приложения математики в окружающей нас действительности, в смежных дисциплинах, знакомят с ее использованием в технологии и экономике современного производства, в сфере обслуживания, в быту, при выполнении трудовых операций.

*Цель:* показать многообразие применения математики в жизни, способствовать развитию функциональной грамотности.

*III. «Коварные» пропорции (4 часов).* Еще один традиционный тип задач школьного курса — задачи на пропорции. Метод креста. Задачи на прямую и обратную пропорциональности величин.

*Цель:* способствовать развитию умений решать задачи на пропорции, умений применять знания в нестандартной ситуации, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать.

*IV. Круги Эйлера (диаграммы Эйлера-Венна) (4 часа).* Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи. Круги Эйлера — принятый в логике способ моделирования, наглядного изображения отношений между объемами понятий с помощью кругов. Применение кругов Эйлера позволит решать задачи, которые обычным путем разрешимы лишь при составлении системы трех уравнений с тремя неизвестными.

*Цель*: научить составлять и решать задачи, применяя круги Эйлера.

*V. Задачи на движение (4 часа).* Традиционный тип задач школьного курса, но среди них есть много интересных задач, оставшихся за «бортом» школьной программы. Это задачи на движение по течению и против течения реки, на движение по эскалатору, на среднюю скорость, движение в одном направлении, движении в разных направлениях, движение по окружности.

*Цель*: способствовать развитию умений решать задачи на движение, движение по и против течения реки, движение по эскалатору, среднюю скорость и другие, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать.

*VI. Графы (4 часа).* Теория графов является частью как топологии, так и комбинаторики. Понятие графа, его элементов, виды графов, степень вершин, подсчет числа ребер. Простейшие теоремы, связанные с графом. Задачи, связанны с графами.

*Цель:* способствовать развитию умений решать задачи с помощью графов, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать.

*VII. Модуль (4 часа).* Модуль числа и его геометрический смысл. Наиболее часто используемые способы решения задач, уравнений с модулем.

*Цель:* способствовать развитию умений решать задания с модулем, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать.

*VIII. Логические задачи (3 часа).* Задачи логического характера, связанные с переливанием, взвешиваниями, задачи с логическими таблицами, комбинаторные задачи, решаемые методом перебора различных вариантов, и другие нестандартные задачи.

*Цель:* способствовать развитию умений решать логические задачи, умений применять знания в нестандартной ситуации, развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать; создать условия для развития способностей одаренных детей, подготовки учащихся к успешному выступлению на олимпиадах.

*IX. Функции и графики (3 часа).* Область определения функции. Способы задания функции. Чтение графика функции. Линейная функция и ее график. Свойства линейной функции.

*Цель:* способствовать развитию логического мышления, умения анализировать, рассуждать, читать и строить графики.

*X. Элементы геометрии (4 часов).* Простейшие геометрические фигуры, их распознавание, сравнение, симметричность, вычисление периметров и площадей, разрезание и складывание.

*Цель:* способствовать развитию «геометрической зоркости», внимания, наблюдательности, развитию навыков экспериментального исследования.

**Календарно-тематическое планирование**

(в неделю-1 час, всего -34 часов)

| № урока | Название темы | Кол-во часов | Образовательный продукт | Дидактическое пособие |
|---|---|---|---|---|
| *1* | Приемы быстрых вычислений | 1 | | интернет-ресурсы |
| *2,3,4* | Практико-ориентированные задачи | 3 | | банк задач из интернет-ресурсов |
| | *«Коварные» пропорции* | 4 | | |
| *5* | Решение задач методом креста | 1 | составление задач | приложение |
| *6,7* | Решение задач | 2 | знание правил | тестовые задания |
| *8* | Решение комбинированных задач | 1 | решение проблемных задач | приложение |
| | *Круги Эйлера (диаграммы Эйлера-Венна)* | 4 | | |
| *9* | Круги Эйлера | 1 | опорный конспект | приложение |
| *10* | Решение задач в рисунках | 1 | знание правил и алгоритмов, освоение новых способов | приложение |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | решений | |
| *11,12* | Решение задач | 2 | | приложение |
| | *Задачи на движение* | 4 | | |
| *13,14* | Движение по окружности | 2 | презентация задач | приложение |
| *15,16* | Комбинированные задачи | 2 | проекты | приложение |
| | *Графы* | 4 | | |
| *17* | Основные понятия теории графов | 1 | опорный конспект | приложение |
| *18,19, 20* | Решение типовых задач по графам | 3 | модели | приложение |
| | *Модуль* | 4 | | |
| *21,22* | Решение линейных уравнений содержащих знак модуля | 2 | опорный конспект | приложение |
| *23,24* | Решение задач с модулем | 2 | знание правил и алгоритмов | приложение |
| | *Логические задачи* | 3 | | |
| *25,26* | Задачи, решаемые с помощью таблиц истинности | 2 | знание правил и алгоритмов | приложение |
| *27* | Комбинированные задачи | 1 | составление логических задач | приложение |
| | *Функции и графики* | 3 | | |
| *28* | Задание функции | 1 | опорный конспект | приложение |
| *29,30* | Взаимное расположение графиков | 2 | знание правил и алгоритмов | приложение |
| | *Элементы геометрии* | 4 | | |
| *31* | Симметрия | 1 | презентация заданий | приложение |
| *32,33* | Вычисление периметров и площадей фигур и их частей | 2 | модели | приложение |
| *34* | Разрезание и складывание фигур | 1 | проект | приложение |
| | **Всего** | **34** | | |

В результате изучения курса, *учащиеся должны уметь:*
-решать несложные логические задачи олимпиадного характера;
-решать задачи на движение, пропорции;
-решать отдельные практико-ориентированные задачи;
-использовать круги Эйлера и графы при решении задач.

## Содержание программы для 7 класса

*I. Приемы быстрых вычислений (1 ч).*
*Цель:* Обучить учащихся приемам быстрых вычислений, способствующих развитию вычислительных умений учащихся.

*Содержание:* Обучение приемам быстрого счета осуществляется через использование таких форм устного счета как: «беглый счет», «равный счет», «счет-дополнение», «торопись, да не ошибись», «не зевай», эстафета, молчанка и др.

*Результат:* Учащиеся обучены приемам быстрого счета.
*II. Практико- ориентированные задачи (4 ч).*

*Цель:* Продемонстировать учащимся многообразие применения математики в жизни, а также способствовать развитию функциональной грамотности учащихся через использование задач с практическим содержанием (прикладного характера).

*Содержание:* Уроки ориентированы на решение учащимися задач, возникающих в повседневной жизни, а также на развитие междисциплинарных связей, например, связь предмета математики с предметами экономики, техники, сферы обслуживания, а также обучение использованию решений задач в быту.

*Результат:* Учащиеся обучены практическому применению полученных знаний, умений и навыков в повседневной жизни.
*III. Функции и графики. Преобразование графиков (3 ч).*

*Цель:* Подготовка учащихся к программе более страших классов, обучение основам функций и графиков через увеличение наглядных материалов в разработке уроков.

*Содержание:* Начиная с 7-го класса полезным будет употребление терминов «непрерывность функции», «наибольшее и наименьшее значение функции», «ограниченность функции». Важно опережающее формальное определение, опирающееся на наглядность. Изображение ограниченности функции сверху практикуется геометрически: весь график расположен ниже некоторой прямой. Кроме того, необходимо рассмотреть область определения, наибольшее и наименьшее значении функции на промежутке, монотонность, непрерывность, ограниченность функции. Соответствующие свойства функции рассмотреть на наглядно интуитивном уровне.

*Результат:* Учащиеся подготовлены для более глубокого и детального изучения функций и графиков по программам последующих (старших) классов.
*IV. Логические задачи (6ч).*

*Цель:* Способствовать развитию умений решать логические задачи, умений применять знания в нестандартной ситуации, развитию логического мышления, создать условия для развития способностей одаренных детей.

*Содержание:* Задачи логического характера, с использованием мер длины, переливания (объема), взвешивания (веса), с формулировками, интересными для учащихся, например, задачи о рыцарях и лжецах, задачи с испольованием логических таблиц, а также задачи олимпиадного характера.

*Результат:* Учащиеся получили дополнительные возможности и стимул для развития логического мышления.
*V. Принцип Дирихле (4ч).*

*Цель:* Обучение дополнительным методикам решения нетрадиционных математических задач.

*Содержание:* Изучение и умение применить принцип, сформулированный в несколько шутливой форме – «5 зайцев в 4-х клетках», позволяющий решать весьма нетрадиционные для школьного курса задачи.

*Результат:* Учащиеся получили дополнительные знания и умения по применению принципа Дирихле.
*VI. Алгебра (6ч).*

*Цель:* Обучение учащихся дополнительным методикам решения задач по алгебре с целью увеличения доступности основной школьной программы.

*Содержание:* Задачи, тесно примыкающие по своему содержанию к школьной программе, или пересекающиеся с ней: простые и составные числа, алгоритм Евклида, разложение многочлена на множители и уравнения.

*Результат:* Учащиеся обучены дополнительным методикам решения задач по алгебре.

*VII. Геометрические задачи на построения (4ч).*

*Цель:* Создание условий для более глубокого изучения основ геометрии учащимися, через введение курса разнообразных интересных геометрических задач.

*Содержание:* Задачи предусматривают расширение, углубление и наполнение курса разнообразными интересными и сложными геометрическими задачами. Способствуют овладению програмного материала на более высоком уровне.

*Результат:* Учащиеся получили глубокие знания по геометрии для продолжения изучения предмета в старших классах.

*VIII. Комбинаторика (6ч).*

*Цель:* Создание условий для более глубоко изучения учащимися задач на подсчет чисел различных вариантов.

*Содержание:* Задачи на подсчет чисел различных вариантов. Понятие факториала, числа сочетаний, размещений, перестановок.

*Результат:* Учащиеся углубили свои знания по комбинаторике.

## Календарно-тематического планирование

(в неделю – 1 час, всего -34 часа)

| № урока | Содержание | Кол-во часов | Образовательный продукт |
|---|---|---|---|
| 1 | *Приемы быстрых вычислении* | 1 | Конспект-алгоритм быстрого счета |
| | *Практика-ориентированные задачи* | 4 | Сборник задач по ФГ |
| 2,3 | Задачи с практическим содержанием | 2 | |
| 4,5 | Задачи на совместную работу | 2 | |
| | *Функции и графики.* | 3 | Кластер по построению графиков различного типа |
| 6 | Функции и графики | 1 | |
| 7,8 | Преобразование графиков | 2 | |
| | *Логические задачи* | 6 | Сборник задач по подготовке к логическим конкурсам и олимпиадам |
| 9 | Переливание | 1 | |
| 10 | Взвешивание | 1 | |
| 11 | Рыцари и лжецы | 1 | |
| 12 | Задачи с логическими таблицами | 1 | |
| 13,14 | Задачи олимпиадного характера | 2 | |
| | *Принцип Дирихле* | 4 | Проект-решебник задач (развернутый) |
| 15,16 | Принцип Дирихле | 2 | |
| 17,18 | Решение нетрадиционных задач | 2 | |
| | *Алгебра* | 6 | Составление алгоритма |
| 19 | Простые и составные числа | 1 | |
| 20,21 | Алгоритм Евклида | 2 | |
| 22,23 | Разложение многочлена на множители | 2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 | Решение уравнении | 1 | |
| | *Геометрические задачи на построения* | 4 | Алгоритм построения геометрических место точек |
| 25,26 | Задачи на построения | 2 | |
| 27,28 | Задачи повышенной трудности | 2 | |
| | *Комбинаторика* | 6 | Конспект, алгоритм, кластер |
| 29,30 | Понятие факториала | 2 | |
| 31,32 | Число сочетаний | 2 | |
| 33,34 | Размещение | 2 | |
| | **Всего** | **34** | |

## Содержание программы 8 класса

*I. Степень с рациональным показателем, ее свойства (5 часов).* Понятие степени с рациональным показателем, свойства степени. Способы преобразования выражений, содержащих степени с рациональным показателем.
*II. Теорема Безу. Деление многочлена на многочлен (5часов)*. Формулировка теоремы Безу. Алгоритм схемы Горнера. Разложение многочленов на множители с использованием теоремы Безу и схемы Горнера. Решение уравнений высших степеней с использованием теоремы Безу и схемы Горнера.
*III. Решение олимпиадных задач (5 часов).* Формирование опыта творческой деятельности учащихся через исследовательскую деятельность при решении заданий повышенной сложности;
Криптарифмы - математический ребус, в котором зашифрован пример на выполнение одного из арифметических действий. При этом, одинаковые цифры шифруются одной и той же буквой, а разным цифрам соответствуют различные буквы.)
Разбор задач городской олимпиады. Решение задач международного конкурса «Кенгуру».
*IV. Геометрические задачи (8 часов).* Практическое применение теоремы Пифагора. Нахождение площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге. Метод координат.
*Квадратичная функция, ее график (4 часа)*. Простейшие преобразования графиков функции, построение графиков функций, содержащих выражение под знаком модуля, область определения и область значения данных функций:

$$y = |f(x)|;\ y = f(|x|);\ y = |f(|x|)|;\ |y| = f(x),$$

## Календарно–тематическое планирование

(в неделю 1, всего 34часа)

| № урока | Название темы | Кол-во часов | Образователь ный продукт | Дидакти ческое обеспечение |
|---|---|---|---|---|
| | *Преобразование рациональных и иррациональных выражений* | 5 | | |
| 1 | Преобразование рациональных выражений | 1 | составление теста | Тестовые задания |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2,3 | Преобразование иррациональных выражений | 2 | составление теста | Тестовые задания |
| 4,5 | Извлечение квадратного корня (быстрый счет) | 2 | Знание правил и алгоритмов | Презентация |
| | *Схема Горнера. Теорема Безу.* | 5 | | |
| 6 | Схема Горнера. Теорема Безу | 1 | опорный конспект | Приложение |
| 7,8 | Применение теоремы Безу и Схемы Горнера для разложения многочленов на множители | 2 | презентация задач | Приложение |
| 9,10 | Применение теоремы Безу и Схемы Горнера для решения уравнений высших степеней | 2 | презентация задач | Приложение |
| 11,12 | Частные случаи решения КВУР (быстрый счет) | 2 | знание правил и алгоритмов, освоение новых способов решений | Презентация , электронный тренажер |
| | *Решение олимпиадных задач* | 5 | | |
| 13,14 | Криптарифмы | 2 | конспект | Приложение |
| 15,16,17 | Решение задач международного конкурса «Кенгуру», разбор олимпиадных задач. | 3 | презентация решений, подбор задач | Приложение |
| 18-21 | Практико – ориентированные задачи (PISA) | 4 | презентация решений | Приложение |
| | *Геометрические задачи* | 8 | | |
| 22,23 | Практическое применение теоремы Пифагора | 2 | презентация решений | Приложение |
| 24,25 | Нахождение площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге | 2 | решение проблемных задач | Приложение |
| 26,27 | Метод координат. Уравнение прямой в отрезках | 2 | Конспект, составление компьютерной программы | Приложение |
| 28,29 | Условие параллельности, перпендикулярности прямой, расположение прямой относительно системы координат | 2 | конспект | Приложение |
| | *Функции и графики* | 4 | | |
| 30,31 | Представление функций, заданных графически в аналитической форме | 2 | Освоение программы-графопостроитель НК-график | Приложение |
| 32,33 | Преобразование графиков функций, содержащих модуль | 2 | конспект | Приложение |
| 34 | Защита творческих работ учащихся | 1 | Презентации работ по выбранной теме | |
| | **Всего** | **34** | | |

*Учащиеся должны знать:*

-понятие степени с рациональным показателем, понятие многочлена, понятие модуля;
-формулировку теоремы Безу, схему Горнера;
-формулы площадей фигур на плоскости;
-условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, различные способы составления уравнения прямой;
-устные способы решения квадратных уравнений;
-способы извлечения квадратных корней.
*Учащиеся должны уметь:*
-преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональным показателем;
-разлагать многочлены на множители способом вынесения общего множителя, с помощью теоремы Безу;
-применять координатный метод для решения задач;
-преобразовывать выражения, содержащие степени с целыми показателями;
-решать геометрические задачи с применением формул площадей;
-выполнять преобразования графиков квадратичной функции и строить их.

## Содержание программы 9 класса

*I. Многочлены (3 часа).* Способы разложения многочленов на множители. Деление многочлена на многочлен «уголком». Формулировка теоремы Безу. Алгоритм схемы Горнера. Разложение многочленов на множители с использованием теоремы Безу и схемы Горнера. Метод неопределённых коэффициентов.
*II. Уравнения и системы уравнений (8 часов).* Возвратные уравнения, однородные уравнения, уравнения в целых числах, симметрические и однородные системы уравнений.
*III. Текстовые задачи (7 часов).* Решение текстовых задач на проценты, сплавы, смеси, на движение и на совместную работу.
*IV. Тригонометрия (4 часа).* Формулы суммы и разности тригонометрических функций, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность, формулы универсальной подстановки, формулы понижения степени, дополнительные формулы тригонометрии. Применение формул для преобразования тригонометрических выражений.
*V. Функции и графики (5 часов).* Построение графиков функций, содержащих знак модуля $y = |f(x)|,\ \ y = f(|x|),\ \ y = |f(|x|)|,\ \ |y| = f(x),$ нахождение области определения и области значений функций.
*VI. Геометрические задачи (7 часов).* Опорные задачи, отражающие важные свойства геометрических фигур и демонстрирующие различные подходы к решению планиметрических задач. Следствия из теорем синусов и косинусов. Метод координат.

## Календарно-тематическое планирование

(1 час в неделю, всего 34 часа)

| № | Тема | Кол-во | Образова | Дидактичес |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| урока | | часов | тельный продукт | кое обеспечение |
| | *1.Многочлены* | *3* | | |
| 1 | Способы разложения многочленов на множители. Деление многочлена на многочлен «уголком». | 1 | алгоритм | приложение |
| 2 | Теорема Безу. Схема Горнера | 1 | конспект | приложение |
| 3 | Метод неопределенных коэффициентов. | 1 | конспект | приложение |
| | *2. Уравнения и системы уравнений* | *8* | | |
| 4, 5 | Симметрические и возвратные уравнения. | 2 | алгоритм | приложение |
| 6 | Однородные уравнения с двумя переменными. | 1 | алгоритм | приложение |
| 7-10 | Рациональные алгебраические системы. | 4 | алгоритм | приложение |
| 11 | Уравнения в целых числах. | 1 | алгоритм | приложение |
| | *3. Текстовые задачи* | *7* | таблицы, презентация | |
| 12-14 | Задачи на проценты | 3 | | приложение |
| 15-16 | Задачи на движение | 2 | | приложение |
| 17-18 | Задачи на совместную работу | 2 | | приложение |
| | *4. Тригонометрия.* | *4* | | |
| 19-21 | Формулы суммы и разности тригонометрических функций, преобразования произведения в сумму и разность, формулы универсальной подстановки, формулы понижения степени | 3 | формулы | приложение |
| 22 | Дополнительные формулы тригонометрии | 1 | формулы | приложение |
| | *5. Функции и графики.* | *5* | | |
| 23 | Элементарные функции, их свойства и графики. | 1 | таблица | приложение |
| 24-25 | Построение графиков функций, содержащих знак модуля. | 2 | алгоритм | приложение |
| 26-27 | Исследование дробно-рациональной функции. | 2 | алгоритм | приложение |
| | *6.Геометрия* | *7* | | |
| 28-30 | Опорные задачи планиметрии | 3 | конспект | приложение |
| 31 | Следствия из теорем синусов и косинусов. | 1 | конспект | приложение |
| 32-33 | Координатный метод. | 2 | конспект | приложение |
| 34 | Защита творческих работ учащихся | 1 | Презентации работ | |
| | **Всего** | **34** | | |

*Учащиеся должны знать:*

-способы разложения многочленов на множители, применение разложения на множители для преобразования выражений и доказательства утверждений на делимость, алгоритм деления многочлена на многочлен «уголком»;

-формулировку теоремы Безу, схему Горнера;
-основные методы решения уравнений и систем уравнений различных видов;
-способы решения текстовых задач;
-дополнительные формулы тригонометрии;
-следствия из теорем синусов и косинусов;
-условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, различные способы составления уравнения прямой, формулу расстояния от точки до прямой, формулу для нахождения угла между двумя прямыми;
-алгоритм построения графиков функций, содержащих знак модуля.

*Учащиеся должны уметь:*
-раскладывать многочлены на множители различными способами;
-решать уравнения и системы уравнений различных видов;
-решать текстовые задачи;
-применять дополнительные формулы тригонометрии для преобразования тригонометрических выражений;
-строить графики функций, содержащих знак модуля, исследовать дробно-рациональную функцию, находить область значений функции;
-применять следствия из теорем синусов и косинусов для решения задач;
-применять координатный метод для решения задач.

## ДИДАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К КУРСУ ПО ВЫБОРУ «ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

## 6 КЛАСС

## ПРИЕМЫ БЫСТРЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

### Приемы умножения.

*Умножение на 5, 50.*
Имеем: $5 = 10 : 2$, $50 = 100 : 2$
Вывод:
1) Чтобы умножить число на 5, можно его разделить пополам, потом умножить на 10.
2) При умножении на 50 надо число разделить на 2 и умножить на 100.

Пример: $7{,}4 \cdot 5 = 7{,}4 : 2 \cdot 10 = 3{,}7 \cdot 10 = 37$
$224 \cdot 5 =224 : 2 \cdot 10 = 1120$
$36 \cdot 50 =36 : 2 \cdot 100 = 1800$
$426 \cdot 50 = 426 : 2 \cdot 100 = 21300$

*Умножение на 25, 250.*
Имеем: $25 = 100 : 4$
$250 = 1000 : 4$
Вывод: чтобы устно умножить число на 25 или 250, надо его разделить на 4, а затем полученное частное умножить на 100 или 1000.
Примеры: $224 \cdot 25 =224 : 4 \cdot 100 = 5600$
$44 \cdot 25 =44 : 4 \cdot 100 = 1100$

$168 \cdot 250 = 168 : 4 \cdot 1000 = 42000$
$72 \cdot 250 = 72 : 4 \cdot 1000 = 18000$

*Умножение на 125.*

Имеем: $125 = 1000 : 8$

Чтобы умножить число на 125, надо его разделить на 8, а затем умножить на 1000.

Примеры:

$896 \cdot 125 = 896 : 8 \cdot 1000 = 112000$
$120 \cdot 125 = 120 : 8 \cdot 1000 = 15000$
$240,24 \cdot 125 = 240,24 : 8 \cdot 1000 = 30,03 \cdot 1000 = 30030$

*Умножение на 15.*

Имеем: $15 = 10 + 5 = 10 + 0,5 \cdot 10$

При умножении на 15 надо число умножить на 10 и к произведению прибавить его половину.

Примеры: $64 \cdot 15 = 64 \cdot 10 + (64 \cdot 10) : 2 = 640 + 320 = 960$
$72 \cdot 15 = 720 + 360 = 1080$
$224 \cdot 15 = 2240 + 1120 = 3360$

*Умножение на 9 или 99.*

Имеем: $9 = 10 - 1$
$99 = 100 - 1$

При умножении на 9 или 99 надо число умножить на 10 или 100 и из полученного числа вычесть данное.

Примеры: $45 \cdot 9 = 45 \cdot 10 - 45 = 450 - 45 = 405$
$128 \cdot 9 = 1280 - 128 = 1152$
$7 \cdot 99 = 7 \cdot 100 - 7 = 700 - 7 = 693$
$67 \cdot 99 = 6700 - 67 = 6633$

*Умножение на 11 и на 101.*

Имеем: $11 = 10 + 1$

1) Чтобы умножить число на 11, надо умножить его на 10 и к полученному результату прибавить само данное число.

Пример: $87 \cdot 11 = 870 + 87 = 957$
$36 \cdot 11 = 360 + 36 = 396$

2) При умножении двузначного числа на 11 можно раздвинуть цифры этого числа и вставить между ними их сумму. Получим нужный результат.

Пример: $24 \cdot 11 = 264$

Если сумма цифр двузначного числа сама является двузначной, то ее единицы вставляем между цифрами данного числа, а десятки прибавляем к первой цифре.

Примеры: $67 \cdot 11 = 737$
$59 \cdot 11 = 649$

3) Особенно просто умножение двузначного числа на 101. Надо мысленно приписать справа к данному числу его само и прочесть то, что получится.

Примеры: $62 \cdot 101 = 6262$
$93 \cdot 101 = 9393$

## Умножение многозначных чисел.

*«Умножение крестиком» двузначных чисел.*

Пример: $53 \cdot 37 = 1961$

Подпишем числа одно под другим

$$\begin{array}{ccc} 5 & \times & 3 \\ 3 & & 7 \end{array}$$

1) 5 десятков · 3 десятка =15 сотен=1500
2) $3 \cdot 7 = 21$
3) Итого: $1500 + 21 = 1521$

4) Еще надо учесть произведение единиц каждого числа на десятки другого. Имеем 7 раз 5 десятков, т. е. 350, и 3 раза 3 десятка, т. е. 9 десятков или 90.

$350 + 90 = 440$

5) Итого: $1521 + 440 = 1961$

## Применение формул сокращенного умножения.

*Возведение в квадрат.*

Имеем: $a^2 = a^2 - в^2 + в^2 = (a + в)(a - в) + в^2$

Пример: $988^2 = 988^2 - 12^2 + 12^2 = (988 + 12)(988 - 12) + 12^2 = 1000 \cdot 976 + 144 = 976\,144$

$27^2 = (27 + 3)(27 – 3) + 3^2 = 30 \cdot 24 + 9 = 729$

*Возведение в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5.*

Имеем: пусть число десятков x

тогда все число $10x + 5$

$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 =$

$= 100x \cdot (x + 1) + 25$

Вывод: чтобы возвести в квадрат двузначное число, последняя цифра которого 5, надо умножить число десятков на число, большее на единицу, к произведению приписать 25.

Примеры: $85^2 = 7225$ (т.к. $8 \cdot 9 = 72$)

$45^2 = 2025$ (т. к. $4 \cdot 5 = 20$)

## Быстрое умножение.

Имеем: $(a – в)(a + в) = a^2 - в^2$

Пример: $783 \cdot 787 = (785 – 2)(785 + 2) = 785^2 - 2^2 = 785^2 - 15^2 + 15^2 - 2^2 = (785 + 15)(785 – 15) + 225 – 4 =$

$800 \cdot 770 + 221 = 616000 + 221 = 616221$

Для проверки усвоения пройденного материала можно предложить учащимся выполнить следующую работу.

## Проверь себя!

Выполните действия и заполните таблицу.

В таблице зашифровано греческое слово, которое в русском прочтении означает “избыток”.

Этот термин используется в литературной речи для обозначения словосочетаний, содержащих
некоторое преувеличение.

Е= $65^2$

П=128*5

А=280*50

И=72*11

Г=$985^2$

О=168*125

Л=242*12

Б=37*101

Р=824*25

| 970225 | 792 | 640 | 4225 | 20600 | 3737 | 21000 | 3630 | 14000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

*Ответ*:

| 970225 | 792 | 640 | 4225 | 20600 | 3737 | 21000 | 3630 | 14000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Г | И | П | Е | Р | Б | О | Л | А |

В математике это слово – название линии, которое впервые было использовано в III веке до н.э. греческим математиком Аполлонием Пергским в научной работе, посвящённой линиям на поверхности конуса.
(http://stepanov.lk.net/mnemo/gold.html , http://intelmath.narod.ru/fastcount.html
http://www.allbest.ru/)

## ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

*Задача 1*. Один килограмм мяса стоит 320 рублей. Мама купила 1,5 килограмма мяса и отдала 1 тысячу рублей. Сколько рублей сдачи мама должна получить?
*Задача 2*. Магазин открывается в 10 часов утра, а закрывается в 10 часов вечера. Обеденный перерыв длится с 15 до 16 часов. Сколько часов в день открыт магазин?
*Задача 3*. Сколько штук обрезной доски нужно для 2 кубов досок, если одна обрезная доска имеет размеры 16см *40 мм* 6,5 м ?
Учащимся 6–9 классов дать более сложные задания.
*Задача 4*. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, уменьшается на одно и то же число % от прежней цены. Определите, на сколько % каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если выставленный на продажу за 4 тыс. рублей после двух снижений он был продан за 2250 рублей?
*Задача 5*. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

| Тарифный план | Абонентская плата | Плата за трафик |
|---|---|---|
| 1. План «0» | Нет | 2,5 р. За 1 Mb. |
| 2. План «500» | 550 р. За 500 Mb трафика в месяц | 2 р. За 1 Mb сверх 500 Mb. |
| 3. План «800» | 700 р. За 800 Mb трафика в месяц | 1,5 р. За 1 Mb сверх 800 Mb. |

Пользователь планирует, что его трафик составит 600 Mb и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Mb?

*Задача 6*. Семья из трех человек едет из Томмота в Якутск. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд стоит 780 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

(http://eleskinanatali.ucoz.ru/load/iz_opyta_raboty/bank_praktiko_orientirovannykh_zadach_po_matematike/2-1-0-13)

## «КОВАРНЫЕ» ПРОПОРЦИИ

### Творческое задание «Перепутаница»

☺ Чем больше купил конфет, тем меньше заплатил денег.
☺ Чем дольше горит свеча, тем она длиннее.
☺ Чем выше поднимаешься в горы, тем становиться теплее.
☺ Чем больше ешь пирожных, тем меньше получаешь калорий.
☺ Чем меньше читаешь, тем умнее ты будешь.
☺ Чем больше правильных решений, тем ниже оценка за контрольную работу.
☺ Чем больше выполняешь план, тем меньше зарплата.
☺ Чем дольше идешь, тем меньшее расстояние будет пройдено.
☺ Чем больше расстояние на карте между городами, тем оно меньше в действительности.
☺ Чем дольше работаешь, тем больше спишь.
☺ Чем больше проект дома, тем меньше нужно кирпичей для его строительства.
☺ Чем дольше горит свет, тем меньше платишь за электроэнергию.
☺ Чем больше в ведре воды, тем оно легче.
☺ Чем большее расстояние проедешь, тем меньше нужно бензина.
☺ Чем больше торта ты съешь, тем больше его останется.
☺ Чем чище моешь пол, тем он становиться грязнее.
☺ Чем меньше заряжен телефон, тем дольше он будет работать.
☺ Чем меньше учишь уроки, тем лучше четвертные оценки.

*Задача 1.* В городе находится магазин . Хозяин магазина настолько строг, что за опоздание вычитает из зарплаты по 700 тенге за один день. В одном отделе работали две девушки Юля и Сауле. Их зарплата зависела от числа рабочих дней. Юля за 20 рабочих дней получила 4100 рублей, а Сауле за 21 день получить должна бы больше, но получила меньше, т.к. опаздывала 3 дня подряд. Узнайте, сколько денег получила Сауле?

*Задача 2.* Сказка «Изабелла и двенадцать братьев».

У Изабеллы было двенадцать братьев. Жили они очень дружно, пока не позавидовала злая колдунья. Она превратила братьев в лебедей. Изабелле надо связать 12 рубашек из крапивы, чтобы расколдовать братьев. За 3 дня она свяжет 4 с половиной рубашки. За сколько дней Изабелла свяжет 12 рубашек?

*Задача 3.* Для перевозки арбузов с юга на оптовую базу города Жуковского приехали 24 машины грузоподъемностью 7,5 тонн. Сколько нужно машин грузоподъемностью 4,5 тонн, чтобы перевести тот же груз?

*Задача 4.* В городе Жуковском на авиа-шоу МАКС проходят показательные полёты самолётов. Такому самолёту-истребителю, как МИГ-29 на 3 часа полётов требуется около 7,5 тонн керосина. Сколько тонн керосина потребуется МИГ-29 на 7 часов полётов?

*Задача 5.* Три курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней?

*Задача 6.* Три маляра за 5 дней могут покрасить 60 окон. Сколько маляров надо поставить на покраску окон, чтобы они за 2 дня покрасили 64 окна?

*Задача 7*. Курсы иностранного языка арендуют в школе помещения для занятий. В первом полугодии за аренду четырех классных комнат по 6 дней в неделю школа получала 336 р. в месяц. Какой будет арендная плата за месяц во втором полугодии за 5 классных комнат по 5 дней в неделю при тех же условиях?
*Задача 8*. (Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона) Если писец может за 8 дней написать 15 листов, сколько понадобится писцов, чтобы написать 405 листов за 9 дней?
*Задача 9*. (Старинная задача) На содержание 45 человек издержано в 56 дней 2040 р. Сколько нужно издержать на содержание 75 человек в продолжение 70 дней?
*Задача 10*. (Из «Арифметики» А.Л. Киселева) Для освещения 18 комнат в 48 дней издержано 120 фунтов керосина, причем в каждой комнате горело по 4 лампы. На сколько дней достанет 125 фунтов керосина, если освещать 20 комнат и в каждой комнате будет гореть по 3 лампы?
*Задача 11*. (Старинная задача) Артель землекопов в 26 человек, работающая машинами по 12 ч в день, может вырыть канал в 96 м длины, 20 м ширины и 12 дм глубины в течение 40 дней. Какой длины канал могут вырыть 39 землекопов, работая в течение 80 дней по 10 ч в день, если ширина канала должна быть 10 м, глубина 18 дм?

**Задачи, решаемые с помощью пропорции.**

*Задача 1*. Цена товара понизилась с 4,4 тыс. р. до 3,74 тыс. р. На сколько процентов понизилась цена товара?
*Задача* 2. Машина 0,6 м ткани обработает за 2,16 мин. Сколько требуется времени, чтобы обработать 1,25 м такой ткани?
*Задача* 3. Когда изготовили 756 деталей, то выполнили план на 72%.Сколько деталей должны изготовить по плану?
*Задача* 4. Теплоход прошел расстояние со скоростью 60 км/ч за 2,5 ч. За сколько времени пройдет это расстояние теплоход, если будет идти со скоростью 50 км/ч?
*Задача* 5. На изготовление 8 деталей требуется $1\frac{1}{5}$ г серебра. Сколько серебра потребуется на изг. 12 таких деталей?
*Задача* 6. 24 человека за 6 дней пропололи участок клубники. За сколько дней выполнят ту же работу 36 человек?
*Задача* 7. Для отопления здания заготовлено угля на 180 дней при норме расхода 0,6 т угля в день. На сколько дней хватит этого запаса, если его расходовать ежедневно по 0,5 т?
*Задача* 8. На участке дороги плиты длинной 6 м заменили новыми длиной 8 м. Сколько нужно новых плит для замены 240 старых?
*Задача* 9. Масса ящика с товаром 11,5 кг. Масса товара 9,2 кг. Сколько процентов масса пустого ящика составляет от массы ящика с товаром?
*Проверь себя*: 1) 15%; 2) 4,5 мин; 3) 1050 д 4) 3 часа; 5) 1,8 г; 6) 4 дня; 7) 216 дней; 8) 180 плит; 9) 20%. (https://cacoo.com/diagrams/43dhxQ9xlNOO9KT, http://www.matematika-na.ru/6class/mat_6_21.php)

# КРУГИ ЭЙЛЕРА (ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА-ВЕННА)

**Текстовые задачи, решаемые с применением кругов Эйлера.**

*Задача 1.* В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом. 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

*Задача 2.* В одном канадском городе все жители говорят на английском или французском языке. На английском языке говорят 90% всех жителей, на французском — 80%. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?

*Задача 3.* Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в хоккей, либо в футбол и в хоккей. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 — в хоккей?

*Задача 4.* Из 220 студентов 163 играют в шахматы, 175 — в футбол. 22 человека не играют в эти игры. Сколько студентов одновременно играют в шахматы и в футбол?

*Задача 5.* В группе из 100 туристов 66 человек знают английский язык. 54 знают французский язык и 33 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

*Задача 6.* Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое - только немецкий, шестеро — только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал английский и немецкий, трое — английский и французский. Сколько человек изучало немецкий и французский языки?

*Задача 7.* Из 100 студентов английский язык изучают 42, французский — 28, немецкий — 30, французский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и английский — 5, английский, немецкий и французский — 3. Сколько человек не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают один английский, один немецкий, один французский?

*Задача 8.* В классе 38 учеников. Из них 16 увлекаются математикой 17 — физикой, 18 — историей. Увлекаются двумя предметами — математикой и физикой — четверо, математикой и историей — трое, физикой и историей — пятеро. Трое ж увлекаются ни математикой, ни физикой, ни историей.

Сколько ребят увлекаются одновременно тремя предметами?

Сколько ребят увлекаются лишь одним из этих предметов?

*Задача 9.* В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

*Задача 10.* В спортивном лагере 65% ребят умеют играть в футбол, 70% — в волейбол, 75% — в баскетбол. Каково наименьшее число ребят в процентном отношении, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

*Задача 11.* В лицее при некотором университете 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

*Задача 12.* В классе 40 учеников. Из них по украинскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике — 17 человек и по физике — 22 человека. Только по одному предмету имеют «тройки»: по украинскому языку — 4 человека, по математике — человека и по физике — 11 человек. Семь человек имеют «тройки» и по математике, и по физике, из них пятеро имеют «тройки» и по украинскому языку. Сколько человек учатся без «троек»? Сколько человек имеют «тройки» по двум из трех предметов?

*Задача 13.* (Задача Льюиса Кэрролла) В бою 70 из 100 пиратов потеряли глаз, 75 — одно ухо, 80 получили ранение в руку и у 85 была ранена нога. Какое может быть минимальное число тех пиратов, которые получили одновременно все четыре ранения?

*Задача 14.* После схватки пиратов капитана Флинта с флибустьерами капитана Блада в судовом журнале капитана Флинта было записано: «Все пираты моей команды пострадали. 81% из них потеряли верхний зуб, 82% — нижний, у 83% был подбит правый глаз, у 84% — левый». Как по этим данным установить, какой процент пиратов Флинта одновременно лишился двух зубов и оказался с двумя подбитыми глазами?

*Задача 15.* В некоторой школе есть класс увлеченных ребят. Семь учеников из этого класса увлекаются математикой, шесть — физикой, пять — астрономией. Четверо из учеников увлекаются и математикой и физикой, трое — математикой и астрономией, двое — физикой и астрономией, а один — и математикой, и физикой, и астрономией. Сколько учеников в этом классе?

*Задача 16.* Пол комнаты площадью 12 м2 покрыт тремя коврами: площадь одного ковра 5 м2, другого — 4 м2, третьего — 3 м2.Каждые два ковра перекрываются по площади 1,5 м2, причем - 0,5 м2 из этих полутора квадратных метров приходится на участок пола, где перекрываются все три ковра.

1) Какова площадь пола, не покрытого коврами?

2) Какова площадь участка, покрытого только одним ковром, площадь которого 5 $м^2$?

## ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

<u>Связь между скоростью по течению и скоростью против течения.</u>

Обозначения:
Vc. - собственная скорость,
Vтеч. - скорость течения,
V по теч. - скорость по течению,
V пр.теч. - скорость против течения.
V по теч = Vc + Vтеч ;
V пр. теч = Vc - V теч.;
Vпо теч — Vпр. теч = 2 Vтеч.
Vтеч = (V по теч - Vпр. теч ): 2

*Замечание 1.* V по течению−v против течения=2vр - разность скоростей по течению и против течения реки равна удвоенной скорости течения.

*Замечание 2.* vс=2v по течению+v против течения - формула нахождения собственной скорости тела

*Задача 1*. Скорость катера по озеру равна 16 км/ч.Какой путь пройдет катер за 3 часа?

*Задача 2*. Моторная лодка за 4 часа проплыла по озеру 60 км. Найдите собственную скорость моторной лодки.

```
      1 ч
\----------\----------\----------\----------\
      ? км
                 60 км
```

*Задача 3*. Сколько времени потребуется лодке, собственная скорость которой равна 28 км/ч, чтобы проплыть по озеру 84 км?

*Задача 4*. Скорость течения реки равна 2 км/ч. На сколько километров река относит любой предмет (щепку, плот, лодку) за 1час, за 4 часа?

*Задача 5*. Собственная скорость катера равна 21 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч. Найдите скорость катера по течению реки.

*Задача 6*. Скорость катера против течения равна 23 км/ч, а скорость течения 4 км/ч. Найдите скорость катера по течению.

*Задача 7*. Скорость моторной лодки по течению реки равна 14 км/ч/ а скорость течения 3 км/ч. Найдите скорость лодки против течения

*Задача 8*. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

*Задача 9*. Определите, какая скорость получится в результате:

1) vc. + vт. ; 4) vпр. т. + 2vт. ;

2) vc. – vт. ; 5) vпо т. – 2vт. ;

3) vпр. т. + vт. ; 6) vпо т. – vпр. т.

*Задача 10*. Знайка задал Незнайке задачу: «Черепаха ползает со скоростью 2 метра в минуту. Сколько проползет черепаха за 5 часов?». Незнайка тут же решил эту задачу так: 2□ 5 = 10. И ответил Знайке: черепаха за пять часов проползет 10 метров. Знайка покачал головой и сказал, что задача решена неправильно. Почему?
(http://le-savchen.ucoz.ru/load/9-1-0-95, http://shevkin.ru/?ID=622&action=Page, http://shevkin.ru/?ID=622&action=Page, http://ucheba.pro/viewtopic.php?f=118&start=15&t=1602)

## ГРАФЫ

*Задача 1*. Необходимо составить фрагмент расписания для одного дня с учетом следующих обстоятельств:

1) учитель истории может дать либо первый, либо второй, либо третий уроки, но только один урок;
2) учитель литературы может дать один, либо второй, либо третий урок;
3) математик готов дать либо только первый, либо только второй урок;
4) преподаватель физкультуры согласен дать только последний урок.

Сколько и каких вариантов расписания, удовлетворяющего всем вышеперечисленным условиям одновременно, может составить завуч школы?

*Задача 2*. В составе экспедиции должно быть 6 специалистов: биолог,

врач, синоптик, гидролог, механик и радист. Имеется 8 кандидатов, из которых и нужно выбрать участников экспедиции; условные имена претендентов: A, B, C, D, E, F, G и H. Обязанности биолога могут исполнять E и G, врача – A и D, синоптика – F и G, гидролога – B и F, радиста – C и D, механика – C и H.

Предусмотрено, что в экспедиции каждый из них будет выполнять только одну обязанность. Кого и в какой должности следует включить в состав экспедицию, если F не может ехать без B, D – без H и C, C не может ехать вместе с G, A – вместе с B ?

*Задача 3*. Планета имеет форму выпуклого многогранника, причем в его вершинах расположены города, а каждое ребро является дорогой. Две дороги закрыты на ремонт. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам.

(http://nsportal.ru/ap/drugoe/library/grafy-i-ikh-primenenie-pri-reshenii-zadach, http://ru.wikipedia.org/wiki/%D2%E5%EE%F0%E8%FF_%E3%F0%E0%F4%EE%E2, http://kursovikna5.ru/9190_soedinenie_grafov/index.html)

## МОДУЛЬ

Решить уравнение:

1.|x-5|=4.

2.||2x-1|-4|=6.

3.|x+3|+|x-1|=6.

4.|2-x|=2x+1.

5. |x+3|=|x-5|.

6.|x-2|+|x-3|=1

(http://www.za4et.net.ru/referat/oqtu, http://900igr.net/kartinki/matematika/Modul-6-klass/Modul-6-klass.html

http://www.matematika-na.ru/6class/mat_6_28.php)

## ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

При решении задач на переливание необходимо учитывать следующие замечания:

-разрешается наливать в сосуд ровно столько жидкости, сколько в нем помещается;

- разрешается отливать из одного сосуда в другой столько жидкости, сколько необходимо, чтобы второй сосуд стал полным. - разрешается переливать всю жидкость из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается.

### Задачи на переливание

*Задача 1*. Как, имея 2 ведра емкостями 4л и 9л, налить из водопроводного крана 6л воды?

*Задача 2*. В первый сосуд входит 8л, и он наполнен водой. Имеется ещё 2 пустых сосуда емкостями 5л и 3л. Как с помощью этих сосудов отмерить ровно 1 л?

*Задача 3*. В первый сосуд входит 12 л, и он наполнен водой. Имеется ещё 2 пустых сосуда емкостями 5л и 8л. Как разделить воду на две равные части?

*Задача 4*. Имеется 2 типа песочных часов: одни отмеряют 7 мин, а другие – 11 мин. Как с их помощью отмерить 15 мин, необходимых для того, чтобы сварить вкрутую яйцо?

*Задача 5*. В бочке 28л бензина. Имеется 2 ведра емкостью по 7л, в которые нужно налить по 6л бензина. Кроме того, есть черпак емкостью 4л. Как можно осуществить разлив?
*Задача 6*. В бочке хранится несколько вёдер бензина. Как из неё отлить 6л бензина в другую бочку с помощью 9- и 5-литрового бидонов?
*Задача 7*. Имеется 2 сосуда емкостями 2л и 5л. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить 1л воды из водопроводного крана.
*Задача 8*. Однажды мачеха дала Золушке два ведра объемами 5 и 9 литров и сказала ей принести из колодца ровно 3 литра воды. Золушка справилась с задачей. А Вы смогли бы? Покажите как.
*Задача 9*. Имеются три сосуда вместимостью 8, 5 и 3 литра. Наибольший сосуд полон молока. Как разделить это молоко на две равные части, используя остальные сосуды?
*Задача 10*. Можно ли, пользуясь 9- и 12-литровыми сосудами,
отмерить воду в количестве: а) 6 л; б) 4 л?
*Задача 11*. Как, пользуясь сосудами емкостями 7 л и 12 л, получить 1 л воды?
*Задача 12*. В первый сосуд вмещается 9 л воды, во второй 5 л, а в третий – 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные – пусты. Как с их помо-щью отлить: а) 1 л воды; б) 7 л воды?
*Задача 13*. Бидон емкостью 10 л наполнен молоком. Требуется перелить из это-го бидона 5 л в 7-литровый бидон, используя при этом еще один, 3-литровый. Как это сделать?
*Задача 14*. В бочке 18 л бензина. Имеется два ведра по 7 л, в которые нужно на-лить по 6 л бензина, и черпак, объем которого равен 4 л. Как можно осуществить разлив?
*Задача 15*. Как с помощью двух сосудов емкостями 7 л и 4 л разделить поровну молоко, находящееся в 12-литровом бидоне?
*Задача 16*. Можно ли с помощью двух сосудов емкостями 9 л и 11 л набрать из крана 10 л воды?
*Задача 17*. В один стакан налито 5 ложек чая, а в другой – 5 ложек молока. Ложку молока перелили из второго стакана в первый, затем тщательно все перемешали и ложку чая с молоком перелили обратно во второй стакан. Чего оказалось больше: чая во втором стакане или молока – в первом?
*Задача 18*. Имеется три сосуда без делений объемами 4 л, 5 л, 6 л, кран с водой, раковина и 4 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 8 л смеси воды с сиропом, так чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?
*Задача 19*. Как разделить поровну между двумя семьями 12 литров хлебного кваса, находящегося в двенадцатилитровом сосуде, воспользовавшись для этого двумя пустыми сосудами: 8-литровым и 3-литровым?
*Задача 20*. У Карлсона есть ведро варенья, оно вмещает 7 литров. У него есть 2 пустых ведерка - 4-литровое и 3-литровое. Помогите Карлсону отлить 1 литр варенья к чаю в меньшее (3-литровое) ведерко, оставив 6 литров в большом (7-литровом) ведре.
*Задача 21*. Летом Винни Пух сделал запас меда на зиму и решил разделить его пополам, чтобы съесть половину до Нового Года, а другую половину - после Нового

года. Весь мед находится в ведре, которое вмещает 6 литров, у него есть 2 пустые банки - 5-литровая и 1-литровая. Может ли он разделить мед так, как задумал?

*Задача 22*. На другой год Винни Пух запасся 10 литрами меда. Под руками у него два ведра - 7-литровое и 4-литровое. Как ему разделить мед пополам?

*Задача 23*. Для разведения картофельного пюре быстрого приготовления "Зеленый великан" требуется 1 л воды. Как, имея два сосуда емкостью 5 и 9 литров, налить 1 литр воды из водопроводного крана?

*Задача 24*. Для марш-броска по пустыне путешественнику необходимо иметь 4 литра воды. Больше он взять не может. На базе, где имеется источник воды, выдают только 5-литровые фляги, а также имеются 3-литровые банки. Как с помощью одной фляги и одной банки набрать 4 литра во флягу?

*Задача 25*. Имеются 3 бидона. 10литров, 7 литров и 3 литра. Нужно из 10 литрового бидона перелить 5 литров молока чтобы в нем осталось 5 литров. Это нужно сделать за 8 действий, то есть например перелить 7 литров это 1 действие, а перелить 7 литров, а затем еще 3 литра это 2 действия.

**Задачи на взвешивание**

*Задача 1*. На столе лежит десять пронумерованных шляп. В каждой шляпе лежит по десять золотых монет. В одной из шляп находятся фальшивые монеты. Настоящая весит 10 граммов, а поддельная только 9. В помощь даны весы со шкалой в граммах. Как определить в какой из шляп находятся фальшивые монеты, используя весы только для одного взвешивания? Весы могут взвешивать не более 750 грамм.

*Задача 2*. Имеется 13 монет, из них ровно одна фальшивая, причем неизвестно, легче она настоящих или тяжелее. Требуется найти эту монету за три взвешивания. Весы - стандартные для задач этого типа: две чашечки без гирь.

*Задача 3*. У барона Мюнхгаузена есть 8 внешне одинаковых гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 8 г. Он помнит, какая из гирек сколько весит, но граф Склероз ему не верит. Сможет ли барон провести одно взвешивание на чашечных весах, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь?

*Задача 4*. В аптеку поступило сильнодействующее лекарство - 8 упаковок по 150 таблеток. Следом пришло сообщение, что в этой партии есть несколько упаковок с бракованными таблетками - их вес на 1 мг больше нормальной дозы. Как за одно взвешивание выявить все упаковки с бракованными таблетками? Упаковки можно вскрывать.

*Задача 5*. Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета? Находить фальшивую монету не требуется.

*Задача 6*. Как развесить 20 фунтов чая в 10 коробок по 2 фунта в каждой за девять развесов имея только гири на 5 и на 9 фунтов? Используются обычные весы с двумя чашами - как у статуи Правосудия).

*Задача 7*. Эта история случилась давным-давно, еще во времена крестовых походов. Один из рыцарей был захвачен мусульманами в плен и предстал перед их предводителем - султаном Саладином, который объявил, что освободит пленника и его коня, если получит выкуп в 100 тысяч золотых монет. "О, великий Саладин, - обратился тогда к султану рыцарь, у которого за душой не было ни гроша, - ты лишаешь последней надежды. У меня на родине мудрому и находчивому пленнику дается шанс выйти на свободу. Если он решит заданную головоломку, его отпускают на все четыре стороны, если нет - сумма выкупа удваивается!"

"Да будет так, - ответил Саладин, и сам обожавший головоломки. - Слушай же. Тебе дадут двенадцать золотых монет и простые весы с двумя чашками, но без гирь. Одна из монет фальшивая, однако неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Ты должен найти ее всего за три взвешивания. Не справишься с задачей до утра - пеняй на себя!" А вы смогли бы выкрутиться?

*Задача 8.* Имеется 8 с виду одинаковых монет. Одна из них фальшивая и известно, что она легче настоящей. Как с помощью всего лишь двух взвешиваний найти фальшивую монету? В Вашем распоряжении только лабораторные весы, которые показывают только больше-меньше.

*Задача 9.* Имеется 100 серебряных монет разных размеров и 101 золотая монета также разных размеров. Если у одной монеты размер больше, чем у другой, то она и больше весит, но это верно только для монет, сделанных из одного и того же металла. Все монеты можно легко упорядочить по размерам на глаз. Отличить золота от серебра можно тоже :-). Как за 8 взвешиваний определить, какая монета из всех 201 штук занимает по весу ровно 101-е место? Все 201 монеты также различны по весу. Весы с двумя чашками, как обычно.

*Задача 10.* Еще известная задача такого уровня: (Возможно это легенда, но очень уж красивая). Во времена Второй Мировой Войны, английские ученые подбросили немецким ученым, чтобы они не решали военные проблемы, а решали головоломки, следующую логическую задачу.

Кладоискатели нашли клад и записку в которой было написано: В этих 20 мешках с золотыми монетами есть один мешок с фальшивыми монетами. Известно, что фальшивая монета в два раза тяжелее настоящей.

Как при помощи одного взвешивания определить в каком мешке находятся фальшивые монеты?

*Примечание.*

Взвешиванием называется тот момент, когда весы, типа коромысла, станут горизонтально, показывая, что на правой стороне весов и на левой стороне одинаковый вес. И еще: англичане приделали приписку к задаче, что они потратили 10 тысяч человеко-часов для решения этой задачи.

*Задача 11.* Три человека купили сосуд, полностью заполненный 24 унциями бальзама. Позже они приобрели три пустых сосуда объемом 5, 11 и 13 унций. Как они могли бы поделить бальзам на равные части используя эти четыре сосуда? Постарайтсь решить задачу за наименьшее количество переливаний.

*Задача 12.* Имеются трёхлитровая банка сока и две пустые банки: одна - литровая, другая - двухлитровая. Как разлить сок так, чтобы во всех трёх банках было по одному литру?

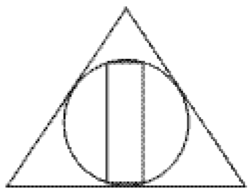
*Задача 13.* В одном порту моряк пришел в лавку с пустым бочонком на пять галлонов и попросил лавочника налить туда четыре галлона отборного ямайского рома. К несчастью, единственным сосудом для измерения был старый оловянный кувшин на три галлона. Как лавочник сумел точно отмерить четыре галлона с помощью этих двух емкостей?

*Задача 14*. Имеюся 6 гирь весом 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г. На них нанесена соответствующая маркировка. Однако есть основания считать, что при маркировке гирь допущена одна ошибка. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах, на которых можно сравнить веса любых групп гирь, определить, верна ли имеющаяся на гирях маркировка?

*Задача* 15. Имеется 9 одинаковых монет, одна из которых фальшивая и по этой причине легче остальных. Мы располагаем двумя весами без гирь, позволяющими сравнивать по весу любые группы монет. Однако одни из имеющихся весов являются грубыми, на них нельзя отличить фальшивую монету от настоящей. Их точность не позволяет уловить разницу в весе. Зато другие весы точные. Но какие весы грубые, а какие точные - неизвестно. Как в этой ситуации с помощью трех взвешиваний определить фальшивую монету?

**Задачи на активный перебор вариантов отношений**

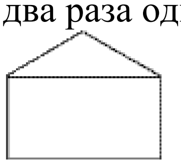
*Задача 1*. Как разделить 6 яблок на 6 человек, чтобы каждый получил по одному яблоку и одно осталось в корзинке?

*Задача 2*. Из каких знакомых тебе фигур состоит эта фигура: 

*Задача 3*. Заполни цифрами квадрат так, чтобы сумма чисел по всем направлениям была равна 15.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 5 | 3 |
| 2 | | |

*Задача 4*. Нарисуй такую же фигуру без отрыва карандаша от бумаги и не проводя два раза одну и ту же линию.



(http://www.youtube.com/watch?v=Qt5YzfK3jiA
fonova.ucoz.ru/load/razvitie_tvorcheskogo_myshlenija/matematicheskaja_mozaika/zadachi_quot_na_perelivanie_quot/18-1-0-61
http://nazva.net/rubric/1,http://brainden.com/golovolomki/weighing-puzzles.htm)

## ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

(http://www.mathematics-repetition.com/6-klass-test/test-6-9-2-1-lineynaya-funktsiya-i-ee-grafik.html, http://video.sabak.kz/flipchart.php?id=143, http://www.tutoronline.ru/blog/linejnaja-funkcija.aspx, http://fgraphiks.narod.ru/lineynaya.html)

## ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

### Задачи на нахождение периметра, площади и сторон геометрических фигур

*Задача 1*.Периметр квадрата 60 см. Найдите площадь квадрата.

*Задача 2.*Площадь цветника прямоугольной формы 96 кв. м. Какова может быть длина и ширина этого участка?

*Задача 3.*Нужно изготовить из проволоки рамки прямоугольной формы. Стороны рамки равны 25 и 15 см. Сколько проволоки пойдет на изготовление трех таких рамок?

*Задача 4.*Два прямоугольника имеют одинаковую площадь. Длина первого 8 см. Ширина его 9см. Найдите ширину второго прямоугольника, если его длина в 2 раза меньше.

*Задача 5*. Реши задачу и выполни чертеж. Периметры двух прямоугольников одинаковые. Длина первого прямоугольника 6 см, ширина в 2 раза меньше. Найди ширину второго прямоугольника, если его длина 8 см.

*Задача 6.*Начерти квадрат с таким же периметром, как и у прямоугольника со сторонами 6 и 8 см.

*Задача 7.*Периметр прямоугольника 40 см. Одна сторона 4 см. Найди другую сторону.

*Задача 8.*Два прямоугольника имеют одинаковую площадь. Найди ширину второго прямоугольника, если размеры первого 8 и 6 см, а длина второго 12 см.

*Задача 9.*Дачный участок прямоугольной формы имеет площадь 600 кв.м. Длина другого участка в два раза больше, а ширина вдвое меньше. Какова площадь второго огорода?

*Задача 10.*Два прямоугольника имеют одинаковую ширину. Длина первого 12 см, а периметр 30 см. Найди длину второго прямоугольника, если его периметр 42 см.

*Задача 11.*Два прямоугольника имеют одинаковый периметр. Ширина первого 12 см. Длина в 2 раза меньше. Найдите длину второго прямоугольника, если его ширина 7 см.

*Задача 12.*Прямоугольник и квадрат имеют одинаковый периметр. Найди сторону квадрата, если длина прямоугольника 12 см, а ширина в 2раза больше.

*Задача 13.*Два прямоугольника имеют одинаковую ширину. Найдите периметр второго прямоугольника, если его длина 13 см. Периметр первого прямоугольника 30 см, а его длина 10 см.

*Задача 14.*Ширина прямоугольника вдвое меньше его длины. Вычислите площадь и периметр прямоугольника, если его ширина равна 6 см.

*Задача 15.*Периметр прямоугольника равен 28 см. Длина 12 см. Найдите площадь прямоугольника.

*Задача 16.*Комнату длиной 6м 50см и шириной 3м 25 см оклеивают обоями. Сколько бордюра нужно купить, чтобы оклеить все четыре стены сверху?

*Задача 17.*Сколько тесьмы надо купить для обшивки скатерти, если площадь скатерти 12 кв.м, а длина 4м?

(http://www.myshared.ru/slide/228230/, http://festival.1september.ru/articles/594374/ http://pedagogic.ru/books/item/f00/s00/z0000010/st008.shtml)

## 7 КЛАСС

## I. ПРИЕМЫ БЫСТРЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Особые приемы умножения.

Чтобы применять особые приемы умножения, необходимо уметь всякое целое число быстро устно умножить и делить на 2 и 3, а также уметь быстро устно складывать и вычитать числа в пределах сотни.

*Умножение на 4*. может быть сведено к двукратному последовательному умножению данного числа на 2.

$48\cdot 4 = 48\cdot 2\cdot 2$ $\qquad$ $157\cdot 4 = 157\cdot 2\cdot 2$

*Умножение на 5*.

$42\cdot 5 = \cdot 10 = 21\cdot 10 = 210$

$93\cdot 5 = \cdot 10 = 465$

*Умножение на 6*.

При умножении на 6 можно применять два способа:

1) Последовательное умножение

$52\ 6 = 52\cdot 2\cdot 3 = 104\cdot 3 = 312$

2) Представление 6 в виде суммы 5 и 1

$52\ 6 = 52\ (5+1) = 312$

*Умножение на 7*.

$52\ 7 = 52\ (5+2) = 260 + 104 = 364$

*Умножение на 9*.

$52\ 9 = 52\ (10-1) = 520 - 52 = 468$

*Умножение на 11*.

$52\ 11 = 52\ (10+1) = 520 + 52 = 572$

1) *Умножение чисел, оканчивающихся нулями.*

$40\cdot 7 = (4\cdot 7)\cdot 10$ $\qquad$ $8\cdot 60 = (8\cdot 6)\cdot 10$

$400\cdot 7 = (4\cdot 7)\cdot 100$ $\qquad$ $4\cdot 600 = (4\cdot 6)\cdot 100$

$1200\cdot 50\cdot =(12\cdot 5)\cdot 1000$ $\qquad$ $120\cdot 70 = (12\cdot 7)\cdot 100$

2) *Умножение любого числа на двузначное путем разложения множителя на десятки и единицы.*

$46\cdot 12 = 46\cdot 10 + 46\cdot 2$ $\qquad$ $243\cdot 31 = 234\cdot 30 + 243\cdot 1$

3) *Перестановка сомножителей.*

$2\cdot 93\cdot 5 = 2\cdot 5\cdot 93 = 10\cdot 93$ $\qquad$ $125\cdot 201\cdot 8 = 201\cdot 125\cdot 8 = 201\cdot 1000$

$4\cdot 17\cdot 25 = 17\cdot 4\cdot 25 = 17\cdot 100$

Задачи.

1. Улитка ползёт вверх по столбу высотой 10 м. За день она поднимается на 5 м, а за ночь — опускается на 4 м. За какое время улитка доберётся от подножья до вершины столба?
2. Кот в Сапогах поймал четырех щук и ещё половину улова. Сколько щук поймал Кот в Сапогах?
3. Кирпич весит 2 кг и ещё треть собственного веса. Сколько весит кирпич?

4.По кругу написано 7 натуральных чисел. Попробуйте доказать, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

## II. ПРАКТИКО- ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Подоходный налог установлен в размере 5% от заработка. Сколько тенге удерживается за подоходный налог, если заработок составляет 89000 тенге?
2. Двигатель за час расходует *x* л бензина. Двигатель в первый день работал 4 ч, а во второй день 5 ч. Как применить распределительное свойство умножения для того, чтобы узнать, сколько литров бензина израсходовал двигатель за два дня?
3. Рассчитайте расход масляного колера, идущего на окраску панели помещения в виде параллелепипеда с длиной 5 м, шириной 4 м и высотой 2,5 м. Известно, что на окраску 1 $м^2$ требуется 0,2 кг колера. Окна и двери занимают 12% площади поверхности.
4. По данным показания квитанции за электроэнергию для семьи Ивановых, состоящей из 3-х человек

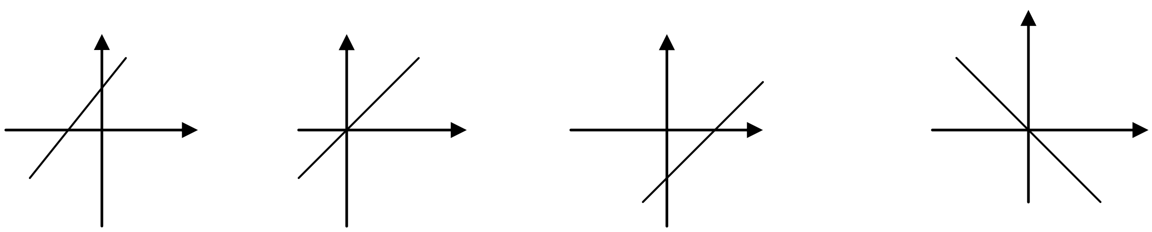
| Начальные показания (кВТ) | Конечные показания (кВТ) | Тариф | Стоимость тарифа (тг) | Кол-во на 1 человека (1 кВТ/ч) | Начислено |
|---|---|---|---|---|---|
| 2740 | 3150 | 1 уровень | 8,6 | 0-90 | |
| | | 2 уровень | 11,2 | 90-180 | |
| | | 3 уровень | 13,9 | свыше | |
| Итого | | | | | |

Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию?

## III. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ

1. Найти координаты точки пересечения прямых $y = 0{,}2x + 11$ и $y = -0{,}1x + 26$.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x + 2$ на отрезке $[-3; 2]$.
3. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика линейной функции $y = -2{,}4x + 7{,}2$ с осями координат.
4. Не выполняя построения, установите взаимное расположение графиков линейных функций:
А) $y = 5x - 6$ и $y = 2x - 6$; Б) $y = 7 - 3x$ и $y = -3x - 7$.
5. Установите соответствие «график – формула»:

А) Б) В) Г)

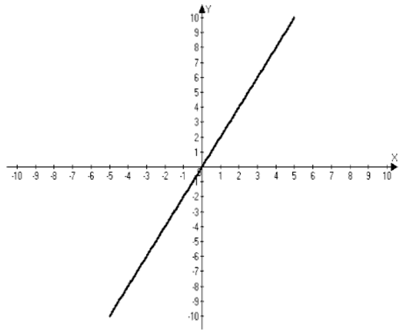


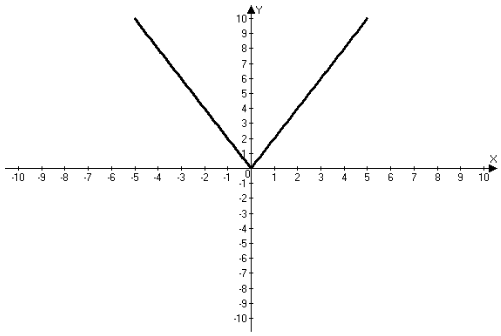
1) $y = x$; 2) $y = -x - 2$; 3) $y = x - 2$; 4) $y = x + 2$; 5) $y = -x$

6. $y = 2x$ $y = |2x|$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 6 | 4 | 2 | 0 | 2 | 4 | 6 |



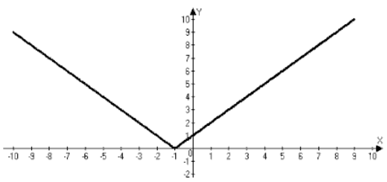


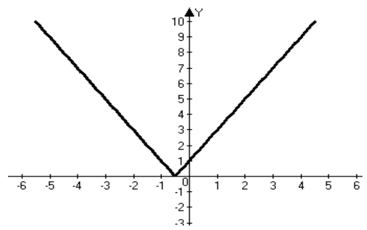
Учащиеся заметят, что для построения графика функции $y = |2x|$ можно построить график функции $y = 2x$, затем оставить без изменения часть графика при $x \geq 0$, а часть графика расположенную ниже оси x (при $x<0$) отобразить симметрично относительно оси Ox.

Таких заданий можно подобрать много, а способные учащиеся вполне могут построить графики следующих функций: $y = |x + 1|$, $y = |2x + 1|$, используя выводы, полученные при построении графика функции $y = |2x|$.

7. Постройте график функции $y = 0{,}25|x| + 1$

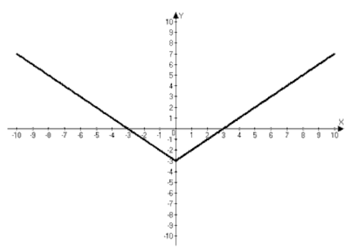
8. $y = | x + 1|$ $y = |2x + 1|$

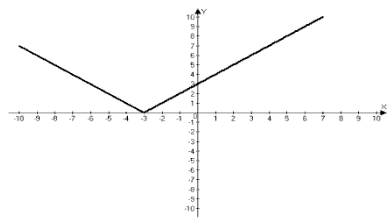




9.Постройте график функции: а) $y = |x| - 3$; б) $y = |x +3|$.

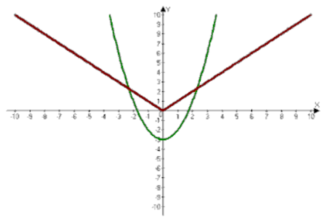
$y = |x| - 3$ $y = |x +3|$





10.Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = |x| \end{cases}$



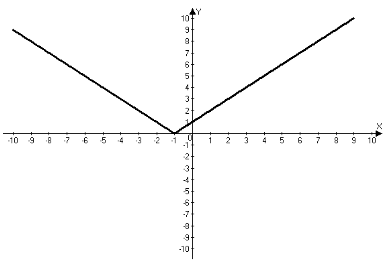
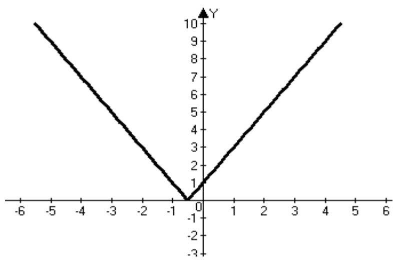
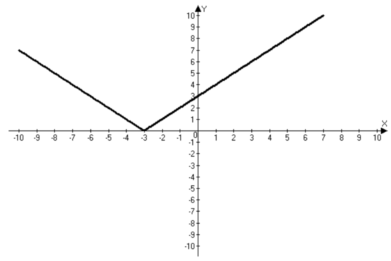
Ответ: (≈ -2,3; ≈2,3) (≈ 2,3; ≈2,3)

11.Изобразив схематически графики, выясните, имеет ли решение система уравнений и если имеет, то сколько:

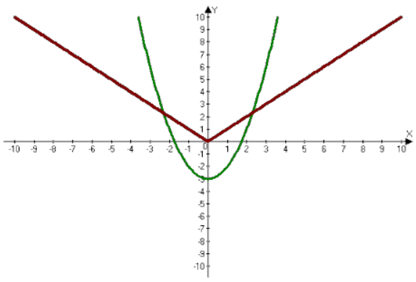
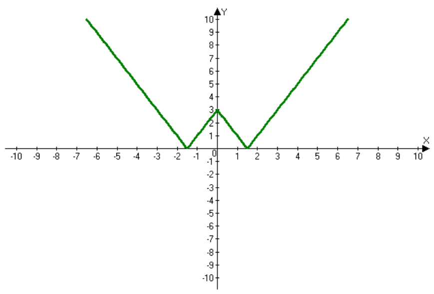
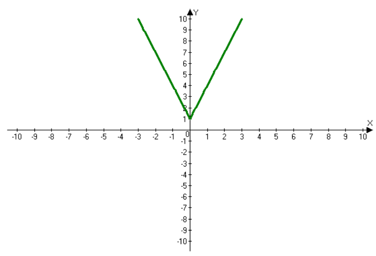
| а) | б) | в) | г) | д) |
|---|---|---|---|---|
| $y = x^2 – 3$ | $y = x^2 – 3$ | $y = x^2 – 3$ | $y = x^2 – 3$ | $y = x^2 – 3$ |
| $y = \lvert x\rvert - 3$ | $y = -\lvert x\rvert$ | $y = 4 - \lvert x\rvert$ | $y = -\lvert x\rvert - 3$ | $y =-\lvert x\rvert - 4$ |
| (3 решения) | (2 решения) | (2 решения) | (1 решение) | (нет решения) |

12. Тренировочные упражнения:

а) $y = \lvert\, \lvert 2x\rvert-3\, \rvert$ б) $y = \lvert\, 3\lvert x\rvert + 1\rvert$ в) $y =\lvert\, x^2 - 4\lvert x\rvert + 3\, \rvert$

г) $y = \lvert x\rvert + x$ д) $y = 2\lvert x\rvert + x$ е) $y = \sqrt{x^2} + 3$

13. В какой четверти расположен график функции $y = |x^2 - 1|$
14. Найдите точки пересечения функции $y=2x^2-8$ с осью абцисс.
15. Постройте параболу $y=(x-1)^2$ и определите ось симметрии.
16. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y=(x-1)^2$.

## IV. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1) Имеются 12-литровый бочонок, наполненный квасом, и два пустых бочонка — в 5 и 8 л. Попробуйте, пользуясь этими бочонками: а) разделить квас на две части — 3 и 9 л; б) разделить квас на две равные части.
2) Морская вода содержит по весу 5% соли. Пресной воды нужно добавить к 0,8 кг морской, чтобы содержание соли в последней составляло 2%
3) К животноводческой ферме нужно проложить 191 м водопровода. Ферма располагает трубами длиной 5 м и 7 м. Чтобы сделать наименьшее число соединении, нужно тех и других труб?
4) Имеются двое песочных часов—на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

5) Рабочие распилили несколько брёвен. Они сделали 10 распилов и получили 16 чурбачков. Сколько брёвен они распилили?
6) В токарном цехе вытачиваются детали из стальных заготовок, из одной заготовки — деталь. Стружки, оставшиеся после обработки трех заготовок, можно переплавить и получить ровно одну заготовку. Сколько всего деталей можно сделать из 9-ти заготовок? А из 14-ти? Сколько нужно взять заготовок, чтобы получить 40 деталей?
7) Запишите формулу своей задачи, ответьте на вопрос: будет ли данная зависимость линейной? Постройте график данной функции:
1. В организме человека всегда есть определенное число бактерий, их около 10 тыс. Во время эпидемии гриппа, если больной не принимает антибиотики, то количество бактерий в организме каждый день увеличивается на 50 тыс. Сколько бактерий будет в организме человека через $x$ дней, через 3 дня, через 4 дня?
2. Медиками установлено, что для нормального развития ребенок или подросток, которому T лет ($T\leq 18$) должен спать в сутки $t = 17 - T/2$. Сколько часов ребенок должен спать в 2 года, 13 лет, 16 лет, а новорожденный ребенок?

## V. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

*Принцип Дирихле (автор: Д. Калинин).*

Утверждение «среди любых трех целых чисел найдутся два числа одной четности» кажется очевидным, также как и утверждение «среди 13 человек найдутся двое, родившиеся в один месяц». И то, и другое можно обосновать разбором случаев. Но более грамотным будет построить рассуждение от противного. Для второго утверждения это будет выглядеть так: «предположим, что не найдется двух таких человек. Тогда в каждый из 12 месяцев родилось не более одного человека. Значит, имеется всего не более 12 человек, что противоречит условию задачи: $12 < 13$.»

Такие рассуждения очень часто встречаются при решении задач, поэтому их выделили в отдельное утверждение, называемое *принципом Дирихле*. Классическая формулировка звучит так: «Если $(n + 1)$ кроликов сидят в $n$ ящиках, то найдётся ящик, в котором сидит, по крайней мере, два кролика». Доказательство этого утверждения также строится от противного: «предположим, что в каждом ящике сидит менее двух кроликов (один или ни одного). Тогда во всех $n$ ящиках в совокупности сидит не более $n$ кроликов. Противоречие».

Решение задачи с помощью принципа Дирихле сводится к выбору «кроликов» и «клеток». Иногда не совсем очевидно, кто в данной задаче является «кроликом», и что служит «клеткой».

*Пример 1.* Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника.

*Решение:* Прямая делит плоскость на две полуплоскости, которые мы назовем «клетками». Три вершины треугольника назовем «кроликами». По принципу Дирихле, «найдется клетка, в которой сидит по крайней мере два кролика», то есть найдутся две вершины, лежащие в одной полуплоскости относительно данной прямой. Сторона, соединяющая эти вершины, не пересекает данную прямую.

*Пример 2*. Грани куба окрашены в 2 цвета. Докажите, что найдутся две соседние одноцветные грани.
*Решение:* Рассмотрим три грани куба, имеющие общую вершину. Назовем их «кроликами», а данные цвета — «клетками». По принципу Дирихле, найдутся две грани, окрашенные в один цвет. Они и будут соседними.
Аналогично доказывается общая формулировка принципа Дирихле: «Если $n$ кроликов сидят в $k$ ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем $n / k$ кроликов».
Немного иначе это утверждение выглядит так: «Если $nk + 1$ кроликов сидят в $k$ ящиках, то найдётся ящик, в котором сидит, по крайней мере, $(n + 1)$ кроликов».
*Пример 3*. Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?
*Решение:* Пусть «клетками» у нас будут сорта конфет, а «кроликами» -сами конфеты. По принципу Дирихле найдется «клетка», в которой не менее 25 / 3 «кроликов». Так как $8 < 25 / 3 < 9$, то найдется 9 конфет одного сорта.
Утверждение можно доказать, проводя сразу рассуждения от противного. Пусть конфет каждого сорта не более 9, то есть не превышает восьми. Тогда всего конфет не больше $3 \times 8 = 24$, а по условию их 25. Противоречие.
*Пример 4*. В классе 30 человек. Паша сделал 13 ошибок, а остальные меньше. Доказать, что какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.
*Решение:* По условию задачи, наибольшее число ошибок, сделанных в работе 13. Значит, ученики могли сделать 0, 1, 2, ..., 13 ошибок. Эти варианты будут «клетками», а ученики станут «кроликами». Тогда по (обобщенному) принципу Дирихле (14 клеток и 30 зайцев) найдутся три ученика, попавших в одну «клетку», то есть сделавших одинаковое число ошибок.
*Пример 5*. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка — точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.
*Решение:* Весь ковер можно накрыть такими 25-ю заплатами. По принципу Дирихле какая-то из этих заплат накроет не менее трех дырок.
Иногда принцип Дирихле не работает «впрямую», что требует дополнительных соображений. (http://www.problems.ru/articles/216.php)

## VI. АЛГЕБРА

### Простые и составные числа

1. Найти все натуральные числа n, для которых каждое из шести чисел
$n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$ и $n + 15$ является простым.
*Решение:*
Рассмотрим варианты. Для $n = 1$ число $n + 3 = 4$ составное.
Для $n = 2$ число $n + 7 = 9$ составное.
Для $n = 3$ число $n + 1 = 4$ составное.
Для $n > 4$ все наши числа больше 5 и по крайней мере одно из них делится на 5, так как числа 1, 3, 7, 9, 13 и 15 при делении на 5 дают соответственно остатки 1, 3, 2, 4, 3 и 0, то есть все возможные остатки, откуда следует, что и числа

$n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13$ и $n + 15$
при делении на 5 дают все возможные остатки и, следовательно, хотя бы одно из них делится на 5 и как число, большее пяти (так как $n > 4$), является составным.
Но для $n = 4$ мы получаем простые числа 5, 7, 11, 13, 17 и 19.
*Ответ: $n = 4$.*
2. Найдите все целые числа n, для которых модуль значения трёхчлена n2 – 7n + 10 будет простым числом.
*Решение:*
Так как
$|n^2 - 7n + 10| = |n - 2| \cdot |n - 5|$,
то следует искать такие n при которых один из множителей последнего произведения равен 1, а второй является простым числом. Этому требованию удовлетворяют $n = 3$ и $n = 4$.
*Ответ: $n = 3$, $n = 4$.*
3. Известно, что $p$, $p + 10$, $p + 14$ – простые числа. Найдите число p.
4. Докажите, что число:
а) 210 + 512; б) $n^4 + 64$; в) 4545 + 5454;
является составным.
5. Найдите все простые p для которых число p2 + 14 так же будет простым числом.

## Алгоритм Евклида

1. Пусть надо найти НОД чисел 323 и 437. Сделать это подбором или разложением на простые множители не просто, так как ни одно из этих чисел не кратно 2, 3, 5, 7, 11. Поступаем следующим образом:
437 = 323 * 1 + 114;
323 = 114 * 2 + 95;
114 = 95 * 1 + 19;
95 = 19 * 5.
НОД (323; 437) = 19
В частном случае, часто применяют следствие: НОД(a; b) = НОД (a - b; b), которое получается из общего правила при $q = 1$.
2. Найти НОД(458;252) и НОД(1920;1536).
3. С помощью алгоритма Евклида найти НОД чисел:2016 и 1320; 703 и 481
4. Решите задачу:
1. Для учащихся первого класса приготовили одинаковые подарки. Во всех подарках было 120 шоколадок, 280 конфет, и 320 орехов. Сколько учащихся в первом классе, если известно, что их больше 30?
2. Ребята получили на новогодней елке одинаковые подарки. Во всех подарках вместе было 123 апельсина и 82 яблока. Сколько ребят присутствовало на елке? Сколько апельсинов и сколько яблок в каждом подарке?
3. В класс привезли учебники: по математике 24, по истории 36 и по географии 48. Какое наибольшее число комплектов можно составить из этих книг так, чтобы в каждом было одинаковое число книг по математике, истории и географии? По сколько книг будет в каждом комплекте?"

## Разложение многочлена на множители

*I.* Способ вынесения множителя за скобки: $x^5 - 2x^3 + x^2$.
II. Способ формул сокращённого умножения:
1) $a^4 - 16 = (a^2 - 4)(a^2 + 4) = (a - 2)(a + 2)(a2 + 4)$.

2) $c^6 - 1 = (c^3 - 1)(c^3 + 1) = (c - 1)(c^2 + c + 1)(c + 1)(c^2 - c + 1)$.
3) $a^8 - 1 = (a^4 - 1)(a^4 + 1) = (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$.

*III*. Способ группировки:

$10ay - bx + 2ax - 5by = (10ay - 5by) + (2ax - bx) = 5y(2a - b) + x(2a - b) = (5y + x)(2a - b)$.

$16ab^2 - 10c^3 + 32ac^2 - 5b^2c = (16ab^2 + 32ac^2) - (10c^3 + 5b^2c) = 16a(b^2 + 2c^2) - 5c(2c^2 + b^2) = (16a - 5c)(b^2 + 2c^2)$.

*IV*. Примеры нестандартных разложений многочленов на множители.

Одно или несколько слагаемых представляется в виде суммы или разности, после чего можно применять группировку или формулы сокращенного умножения.

*Пример 1*. Разложение многочлена на множители: $y^2 - 14y + 40$.

$y^2 - 14y + 40 = y^2 - 14y + 49 - 9 = (y^2 - 14y + 49) - 9 = (y - 7)^2 - 3^2 = (y - 7 - 3)(y - 7 + 3) = (y - 10)(y - 4)$.

*Пример 2*. Разложение многочлена на множители $x^2 + 7x + 12$.

$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = (x^2 + 3x) + (4x + 12) = x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$.

*Пример 3*. Разложение многочлена на множители $x^2 + 8x + 7$.

*Пример 4*. Разложение многочлена $x^2 + x - 12$ на множители.

*Пример 5*. Разложение многочлена на множители $x^2 - 10x + 24$.

*Пример 6*. Разложение многочлена на множители $x^2 - 13x + 40$.

*Пример 7*. Разложим на множители многочлен $x^2 + 15x + 54$.

*Пример 8*. Разложение многочлена $x^4 + 3x^2 + 4$ на множители.

$x^4 + 3x^2 + 4 = x^4 + (4x^2 - x^2) + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 = (x^2 + 2)^2 - x^2 = (x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 + x) = (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$.

*Пример 9*. Разложение многочлена на множители $x^4 + x^2 + 1$.

*Пример 10*. Разложение многочлен $x^4 + 4$ на множители. Данный многочлен представляет интересный пример выражения, когда на первый взгляд кажется, что его разложить на множители невозможно. Прибавим к нему $4x^2$ и вычтем $4x^2$, чтобы значение выражения не изменилось.

$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

*Пример 11*. Разложить на множители многочлен: $(x - 2)^4 - (3x + 1)^4$.

## Решение уравнении

1. Решите уравнение $5(x - 2) + 3x = 118$
2. Решите уравнение $0,35(x + 200) - 0,65x = 142$
3. При каких значениях а значение выражения $6a - 3$ в 3 раза меньше значения выражения $6a + 4$?
4. Составьте по условию задачи уравнение, обозначив х - количество мество втором зале.

В трёх залах кинотеатра 522 места. В первом зале в 3 раза больше мест, чем во втором, и на 32 места меньше, чем в третьем. Сколько мест во втором зале?

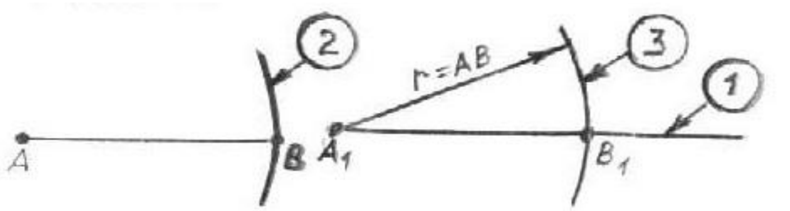
5. Составьте по условию задачи уравнение, обозначив буквой х количество марок в первом альбоме.

В двух альбомах 210 марок. Если из первого альбома переложить во второй 30 марок, то в первом окажется в 2 раза меньше марок, чем во втором. Сколько марок в первом альбоме?

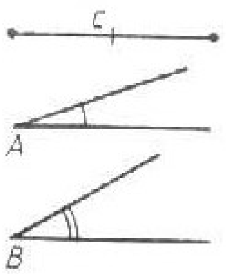
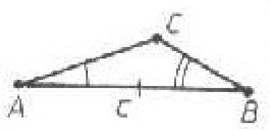
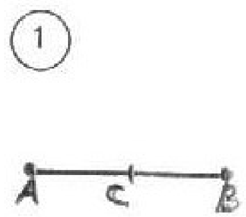
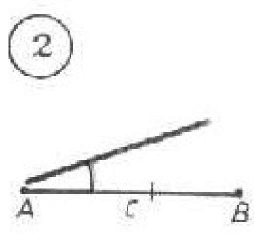
6. Расстояние между пунктами А и В 40 км. Из пункта В выехал велосипедист, а из А навстречу ему автомобиль. Автомобиль проехал до встречи расстояние в 4 раза больше, чем велосипедист. На каком расстоянии от А произошла встреча?
7. Решить относительно *x* уравнение.

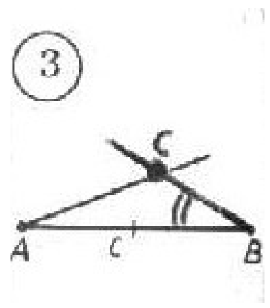
## VII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЯ

*Пример 1.* Построение отрезка, равного заданному.



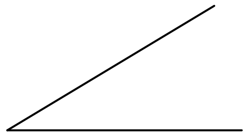

В кружках на рисунках показан порядок построения. В данном задании отрезок можно построить в три этапа.
1. Провести луч с началом в точке $A_1$;
2. Циркулем измерить заданный отрезок АВ;
3. Провести часть окружности, радиус равен отрезку АВ, с центром в точке $A_1$. Точка пересечения окружности и луча $A_1$ дадут точку $B_1$.
Построен отрезок $A_1B_1$.
*Пример 2.* Построение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.

| Дано | Требуется построить | Построение |
|---|---|---|
|   |   |   |
| 1. Произвольно начертить отрезок АВ, равный заданному отрезку с.<br>2. Построить угол А, равный заданному.<br>3. Построить угол В, равный заданному.<br>Точка пересечения двух сторон углов А и В – вершина треугольника С. | |   |

| | |
|---|---|
| Построили треугольник АСВ по стороне и двум заданным углам. |  |

**Задачи.**

1. Построить с помощью циркуля и линейки угол $B_1$, равный углу В.



В

2. Построить треугольник ВСН, если ВС = 3 см, СН = 4 см, $\angle$ С = $35^0$.
3. Построить треугольник СДЕ, у которого ДС = 4 см, ДЕ = 5 см, $\angle$ Д = $110^0$.

Подсказка. Перед построением треугольника необходимо сделать «от руки» чертеж треугольника, где показаны все заданные элементы.

4. Построить треугольник КМО, если КО = 6 см, $\angle$ К = $130^0$, $\angle$ О = $20^0$.
5. Построить треугольник ВСР, если $\angle$ С = $15^0$, $\angle$ Д = $50^0$, СД = 3 см.
6. Построить треугольник ОДЕ, если ОД = 4 см, ДЕ = 2 см, ЕО = 3 см.
7. Построить треугольник МНО, если МН = 1 см, НО = 4 см, ОМ = 3 см.

После построения любого треугольника, самостоятельно провести доказательство того, что получившийся треугольник – искомый, и по возможности провести исследование.

## VIII. КОМБИНАТОРИКА

1) Для проверки на всхожесть было посеяно 200 семян, из которых 170 проросло. В среднем взойдет из тысячи посеянных семян:

2) Рост Армана 1,6 м, рост Ивана 1,65 м, а рост Асета 1,7 м. Следующие утверждения верны:

а) Арман ниже всех.

в) Иван выше Армана, но ниже Асета.

с) Иван выше всех.

3) Было зарегистрировано число пассажиров, ожидаеющих на остановке автобус определенного маршрута(см таблицу).

| Время регистрации | $7^{00}$ | $9^{00}$ | $11^{00}$ | $13^{00}$ | $15^{00}$ | $17^{00}$ | $19^{00}$ | $21^{00}$ | $23^{00}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число пассажиров | 18 | 17 | 19 | 35 | 29 | 17 | 46 | 16 | 8 |

В какое время суток наблюдается наибольшее и наименьшее количество пассажиров?

4) Шенки бегают во дворе. Количесво их ног на 21 больше голов. Сколько шенков во дворе?

## 8 КЛАСС

## ТЕОРЕМА БЕЗУ. СХЕМА ГОРНЕРА

*Определение.* Уравнение $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$, где n – натуральное число, a - произвольные постоянные коэффициенты, называется *целым рациональным уравнением n – й степени*.

*Теорема.* Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

*Теорема Безу.* Остаток от деления многочлена $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$ на двучлен x-a равен P(a).

Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления с помощью схемы Горнера:

Если $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})(x-a)$

| | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | … | $P_{n-1}$ | $P_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $b_0=p_0$ | $b_1=p_1+b_0\cdot a$ | $b_2=p_2+b_1\cdot a$ | $b_3=p_3+b_2\cdot a$ | | $b_{n-1}=p_{n-1}+b_{n-2}\cdot a$ | $b_n=p_n+b_{n-1}\cdot a$ |

*Пример 1.* Дано: $x^5-5x^4-9x^3+41x^2+32x-60=0$. Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm5; \pm6; \pm10; \pm12; \pm15; 20; \pm30; \pm60$, но это очень большое количество делителей, поэтому можно воспользоваться тем, что если сумма коэффициентов равна 0, то один из корней 1.

1-5-9+41+32-60=0 $\Rightarrow$ 1 – корень.

| | 1 | -5 | -9 | 41 | 32 | -60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -4 | -13 | 28 | 60 | 0 |
| 2 | 1 | -2 | -17 | -6 | 20 | - |
| 3 | 1 | -1 | -16 | -20 | 0 | |
| 4 | 1 | 3 | -4 | 0 | | |
| 5 | 1 | 4 | 4 | 0 | | |

$(x-1)(x-3)(x-5)(x+4x+4)=0$

$(x-1)(x-3)(x-5)(x+2)^2=0$

x-1=0, или x-3=0, или x-5=0, или $(x+2)^2=0$,
x=1. x=3. x=5. x=-2.

*Ответ:* 1; 3; 5; -2.

*Пример 2.* $x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6=0$.

Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm6$.

| | 1 | -1 | -8 | 14 | 1 | -13 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | -8 | 6 | 7 | -6 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | -7 | -1 | 6 | 0 | |
| 1 | 1 | 2 | -5 | -6 | 0 | | |
| -1 | 1 | 1 | -6 | 0 | | | |

$(x-1)^3(x+1)(x^2+x-6)=0$

$(x-1)^3(x+1)(x+3)(x-2)=0$

$(x-1)^3=0$, или $x+1=0$, или $x+3=0$, $x-2=0$,
$x=1$. $x=-1$. $x=-3$. $x=2$.

*Ответ:* 1; -1; -3; 2.

*Пример 3.* Решить уравнение: $x^3 - 5x + 4 = 0$

Определим корни многочлена третьей степени:

$\frac{p}{q}: \pm 1; \pm 2; \pm 4$

$f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$

Одним из корней является $x = 1$

| | 1 | 0 | – 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | – 4 | 0 |

$x^3 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x^2 + x - 4) = 0$

$x-1=0$, или $x^2 + x - 4=0$

$x=1$. $D = 1 + 16 = 17$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Ответ: 1; $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

*Пример 4.* Дано: $6x^4-29x^3-89x^2-19x+35=0$

Решение. Делители свободного числа: $\pm1; \pm5; \pm7; \pm35$.

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнения:

| | 6 | -29 | -89 | -19 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | -23 | -112 | -131 | $\neq 0$ |
| -1 | 6 | -35 | -54 | 35 | 0 |
| 5 | 6 | 1 | -84 | -439 | $\neq 0$ |
| 7 | 6 | 13 | 2 | -5 | 0 |

Итак, $6x^4-29x^3-89x^2-19x+35=(x+1)(x-7)(6x^2+7x-5)=0$,

$x+1=0$ или $x-7=0$ или $6x^2+7x-5=0$

$x_1=-1$, $x_2=7$, $x_{3,4}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{12} = -\frac{5}{3}; \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{-1; 7; -\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

*Пример 5.* Решить уравнение: $x^5+5x-42=0$

Решение. Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm6; \pm7; \pm14; \pm21$;

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнений:

| | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | -42 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 6 | $\neq 0$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | $\neq 0$ | |
| -2 | 1 | -2 | 4 | -8 | 21 | $\neq 0$ | |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 21 | 0 | Корень |

$x^4+2x^3+4x^2+8x+21=0$

Делители свободного числа: $\pm 1; \pm 21$

| | 1 | 2 | 4 | 8 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 3 | 7 | 15 | 36 |
| -21 | 1 | -19 | 403 | -8455 | 177576 |
| 21 | 1 | 23 | 487 | 10235 | 214956 |

Ответ: x=2.

*Пример 6.* Дано: $x^4-8x+63=0$

Решение. Делители свободного числа: $\pm 1; \pm 63$

Решаем по схеме Горнера:

| | 1 | 0 | 0 | -8 | 63 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 1 | -1 | -7 | 70 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -7 | 70 |
| -63 | 1 | 63 | -3969 | Не корень | |
| 63 | 1 | 63 | 3969 | Не корень | |

Ответ: решений нет.

*Пример 7.* Решить уравнение: $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$

*Решение.* Делители свободного числа**:** $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12;$

По схеме Горнера находим целочисленные решения уравнения:

| | 1 | -4 | -13 | 28 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -3 | -16 | 12 | 24 | $\neq 0$ |
| 2 | 1 | -2 | -17 | -6 | 0 | Корень |
| 3 | 1 | -1 | -16 | -20 | $\neq 0$ | |
| -3 | 1 | -7 | 8 | 4 | 0 | Корень |

Уравнение принимает вид**:** $(x-2)(x+3)(x^2-5x-2)=0$

$x-2=0$ или $x+3=0$ или $x^2-5x-2=0$

$x_1=2,\ x_2=-3,\ x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-3,\ x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

## КРИПТАРИФМ

*Криптарифм* (cryptarithm) - это *математический ребус*, в котором зашифрован пример на выполнение одного из арифметических действий. При этом одинаковые цифры шифруются одной и той же буквой, а разным цифрам

соответствуют различные буквы. Считается, что никакое число не должно начинаться с нуля.
Криптарифм можно считать хорошим, если в результате шифрования получилась какая-то осмысленная фраза. Например, классическим криптарифмом является пример на сложение, придуманный Генри Э. Дьюдени еще в начале нашего века: SEND+MORE=MONEY. Кроме того, еще одно требование к правильному криптарифму: он должен иметь единственную возможную расшифровку. Например, единственным решением криптарифма Дьюдени является 9567+1085=10652.
*Пример 1.* Замените буквы на цифры так, чтобы равенство стало верным. Одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы означают разные цифры: ABCDE * 4 = EDCBA.
*Ответ:* Чтобы разгадать этот криптарифм, будем действовать по порядку. Во-первых, цифра А должна быть не больше 2, чтобы не было переноса в старший разряд при умножении. Кроме этого, А - чётное число, так как после умножения на 4 младший разряд всегда чётный. Следовательно, А=2. Отсюда же следует, что Е = А*4 = 8. В <= 2 из тех же соображений, что и А, а кроме того, В нечётно, поскольку от произведения Е*4=32 в В добавился нечётный перенос 3. Следовательно, В=1. Отсюда следует, что D равно 2 либо 7, ведь младшая цифра от (4*D+3) равна 1. Значение D=2 не подходит, так как это означало бы перенос в старший разряд, поэтому D=7. Остаётся найти С, которое может быть 7, 8 или 9. Подстановка показывает, что подходит только 9.

Итак, ABCDE * 4 = EDCBA

21978 * 4 = 87912

*Пример 2.* реши+если=силён
*Пример 3.*

| | | |
|---|---|---|
| КНИГА+КНИГА+КНИГА=НАУКА | => | 28375+28375+28375=85125 |
| ДЕРЕВО-ОПИЛКИ=ПАЛКИ | => | 569614-487307=82307 |
| МУХА:ХА=УХА | => | 3125:25=125 |
| КРОТ*Я=ТРОЯК | => | 4973*8=39784 |

Допускается использование русских и латинских букв, круглых скобок, знаков сложения (**+**), вычитания (**-**), умножения (*****), деления (**/**), возведения в степень (**^**) и факториала (**!**). Также, вместо *любой* цифры в математическом выражении можно использовать символ **?**.

| | | |
|---|---|---|
| УМ^А=МЕШОК | => | $12^4$=20736 |
| (М+О+С+К+В+А)^4=МОСКВА | => | $(3+9+0+6+2+5)^4$=390625 |
| А^Р*К^А=АРКА | => | $2^5*9^2$=2592 |
| Я!=АТЛЕТ | => | 8!=40320 |
| НАГОЙ:ЙОГАН=? | => | 87912:21978=4 |

Можно также указать, что гласные буквы в задании соответствуют четным цифрам, а согласные буквы - нечетным цифрам (и наоборот). Например, если гласные буквы соответствуют нечетным цифрам, а согласные буквы - четным, то следующая головоломка имеет единственное решение:

МУХА+МУХА=СЛОН => 2309+2309=4618

Cross+A – программа для вычисления криптарифмов
http://www.cross-plus-a.ru/help.htm

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНКУРСА "КЕНГУРУ" 7-8 КЛАСС

Родиной международного математического конкурса «Кенгуру» является Австралия, в которой это интеллектуальное соревнование получило распространение в 80-е годы XX века. С 1991 года конкурс начал проводиться во Франции, а с 1993 года стал международным и в последующем был внесен в книгу рекордов Гиннеса как самый массовый интеллектуальный конкурс в мире (2 300 000 участников в 30 странах мира в 2001 году).

Главной целью этой игры-конкурса является популяризация математики путем развития и поддержки интереса школьников разных стран мира к изучаемому предмету7

### Комбинаторика

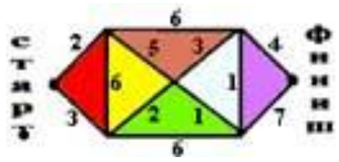
*Задача 1*. Кенгуру ищет легкие пути

На дорожках стадиона расставлены барьеры (их число на каждой дорожке указано на рисунке).

Кенгуру хочет пробежать от старта до финиша, перепрыгивая через наименьшее число барьеров.

Сколько раз Кенгуру придется перепрыгнуть через барьеры?

(A)15; (B) 14; (C) 13; (D) 12; (E)11.




*Решение:* Разобьем весь стадион на треугольники. В каждом треугольнике отбросим "невыгодную" сторону. Ту, в которой число барьеров больше (или равно), чем сумма барьеров двух других сторон (это дорожки с числами барьеров 6, 3, 6, 7).

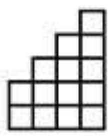
Теперь уже легко перебрать все варианты. 2+(6+4)=12, 2+5+(1+1+4)=13, (3+2)+5+(6+4)=20, (3+2)+(1+1+4)=11.

Верный ответ - ответ (E).

*Задача 2. Считаем варианты*

Сколькими способами можно расположить 4 шашки на нарисованной доске так, чтобы никакие две из них не находились в одном ряду или одной колонке?

(A)64; (B) 28; (C) 16; (D) 8; (E)4.



*Решение:* Начнем перебирать варианты по столбцам слева направо:
1. Располагаем первую шашку в первом столбце – 2 варианта (шашка может лежать или в верхней или в нижней клеточке) .
2. Располагаем вторую шашку во втором столбце – 3-1=2, (2 варианта) где 3 – высота столбца, а 1- количество уже занятых строк.

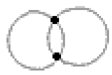
3. В третьем – 4-2=2 (аналогично).
4. В четвертом – 5-3=2 (аналогично). Итого 2*2*2*2=16. Верный ответ - (C).

*Задача 3. Считаем точки пересечения*

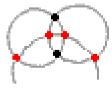
Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей ?

(A)16;  (B) 56;  (C) 38;  (D) 44.

*Решение:* Две окружности могут пересечься в двух точках.



Третья окружность пересечется с каждой из имеющихся окружностей тоже в двух точках, т. е добавятся еще 2 * 2 = 4 точки.



Добавление каждой следующей окружности увеличивает число точек на величину,

равную удвоенному количеству уже имеющихся окружностей.

Итого : 2 + 2*2 + 2*3 + 2*4 + 2*5 + 2*6 + 2*7 = 2* (1 + 2 + 3 + 4 + 5 +6 + 7 ) = 56

Верный ответ (B).

## Арифметика

*Задача 1. Сколько времени придется трудиться малышу?*

Котенок Малыш может облизать себя с головы до кончика хвоста за полчаса, а кот Тоша может облизать Малыша за 5 минут. Себя Тоша способен помыть за 20 минут. Сколько времени придется трудиться Малышу, чтобы помыть Тошу?

(A) 40 минут; (B) 60 минут; (C) полтора часа; (D) 2 часа; (E) 3 часа.

Малыш облизывает сам себя в 6 раз (30мин/5мин=6) медленее, чем его облизывает кот Тоша.

Тоша облизывает себя за 20 минут.

Следовательно, Малыш оближет кота Тошу за 20мин*6=120мин=2часа.

Верен отвер (D).

*Задача 2. Когда семья Васи выехала на дачу?*

Семья Васи приехала на дачу на машине в 16.00. Если бы скорость, с которой они ехали, была на 25% больше, то они приехали бы в 14.30.

В какое время они выехали из дома?

(A)8.00;  (B) 8.30;  (C) 9.00;  (D) 10.00;  (E)12.00

*Решение:* Увеличение скорости движения машины в 1,25 раза приведет к уменьшению продолжительности движения в 1,25 раза или на 20% (1:1,25=0,8).

По условию задачи, выигрыш во времени при увеличенной скорости равен 1, 5 часа ( 16 - 14.30 =1.30 час).

Следовательно, реальное время в пути составит 7, 5 часа (1,5 часа : 0,2). Отправка машины состоялась в 16.00 - 7.30 = 8.30.

Итак, семья выехала в 8 часов 30 минут.

Верен ответ (B).

*Задача 3. Как обстоят дела со зрением у ребят?*

В группе 40% ребят имеют плохое зрение.

70% из них носят очки, остальные 30% носят контактные линзы.

Общее число ребят в очках - 21.

Что верно:

(A) 30 человек имеет плохое зрение;

(B) 30 человек имеет хорошее зрение;

(C) всего в группе 100 человек;

(D) 10 человек носят линзы;

(E) ни один ответ не подходит.

*Решение:* По условию задачи, в группе 21 человек ходит в очках. А это составляет 70% от всех, кто плохо видит.

Следовательно, плохо видят 21/0,7=30 человек.

Здесь можно остановиться и предъявить ответ: верный ответ (A).

Знатоки решают дальше.

1. 40% ребят имеют плохое зрение, а это - 30 ребят, следовательно, всего ребят в группе: 30/0,4=75 человек а (C) - неверно.

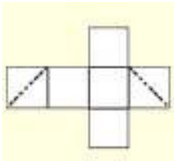
2. У 30 человек - плохое зрение, следовательно, хорошее зрение имеют 75-30=40 чел. а (B) – неверно

4 Из 30 ребят с плохим зрением 21 человек носит очки, следовательно 30-21=9 человек - контактные линзы. То есть (D) - неверно.

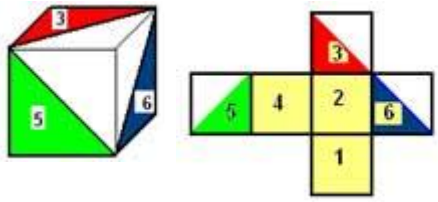
5. (E) - неверно, т.к. есть ответ (A).

## Геометрия.

*Задача 1. Ищем след от плоскости*



Куб пересечен плоскостью. На развертке пунктиром показана часть следа этого сечения на поверхности куба. Какая фигура была в сечении? (A) правильный треугольник; (B) прямоугольник, но не квадрат;(C) прямоугольный треугольник; (D) квадрат; (E) шестиугольник.




*Решение:* Пронумеруем грани куба и попробуем развертку снова свернуть в куб. В качестве донышка возьмем грань 1.

Тогда, 2 - задняя стенка, 3 - крышка, 4 - левая боковая стенка, 5 - передняя стенка, 6 - правая боковая стенка.

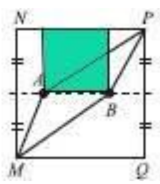
Куб будет иметь вид, указанный на рисунке.

Очевидно, в сечении куба плоскостью получается правильный треугольник. Стороны этого треугольника - диагонали квадратов - боковых граней. Верный ответ - (A).

*Задача 2. Делим квадрат на три части*

MNPQ - квадрат со стороной 6 см, A и B - две точки на его средней линии. Ломанные MAP и MBP делят квадрат на 3 части одинаковой площади. Чему равна длина AB ?

(A)3,6см; (B) 3,8см; (C)4см; (D) 4,2см; (E)4,4см




*Решение:* Восстановим перпендикуляры из точек A и B. Рассмотрим образовавшийся зеленый прямоугольник.

Видно, что его площадь равна площади MBPA и следовательно, равна одной трети плошади большого квадрата и равна (6 · 6) : 3 = 12 кв.см.

Высота зеленого прямоугольника равна 6 : 2 = 3 (см). Длина его второй стороны AB равна 12 кв.см : 3 см = 4 см.

Верен ответ (C).

**Логика.**

*Задача 1. Разберемся с местами в турнирной таблице.*

В турнире по ручному мячу участвовали команды A, B, C, D и E.

Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу в игре дается 2 очка, за ничью 1, за поражение 0. При этом команда B, занявшая второе место, набрала больше очков, чем C, D и E вместе. Отсюда следует, что

(A) A заняла первое место; (B) A выиграла у B; (C) B выиграла у C; (E) такой результат невозможен.

*Решение:* Из того факта, что команда B набрала больше очков, чем C, D и E, следует, что все эти три команды - ниже в турнирной таблице. Следовательно, первое место может быть только у команды A.

Оценим очки каждой команды. Сумма очков, полученных в игре между собой двух претендентов равна двум. Так как каждая команда играла с каждой, то общее количество игр равно: 4+3+2+1= 10 игр. Общая сумма всех очков: $2 \cdot 10=20$. Три команды: C, D и E сыграли между собой 2+1=3 игры и "заработали" 6 очков. Следовательно, у команды B - как минимум 7 очков. Тогда на долю команды A остается 20-7-6=7 очков. А это невозможно, так как она должна быть на первом месте. Верный ответ - (E).

*Задача 2. Сколько серых мышей у Йозефа?*

У Йозефа 100 мышей, некоторые из них белые, некоторые - серые. Известно, что хотя бы одна мышь серая, а из двух мышей хотя бы одна - белая.Сколько серых мышей у Йозефа ?

(A) 1; (B) 49; (C) 50; (D) 99; (E) невозможно определить

*Решение:* <u>Вариант 1.</u> Устроим перебор пар мышей так, чтобы одна мышь была серая (упомянутая в условии), а другая - какая придется.

Из условия следует, что все мыши, которых мы присоединяем к серой - белого цвета.

Ответ: серая мышь у Йозефа - одна. Правильный ответ: (A)

<u>Вариант 2.</u> Предположим, что имеются две, или более серых мышей.

В этом случае существует, по меньшей мере, пара мышей серого цвета, что противоречит условию.

Следовательно, предположение наше ошибочно и в хозяйстве Йозефа имеется лишь одна серая мышь, факт существования которой оговорен условием.

## ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА

В предисловии к своему первому изданию “В царстве смекалки” (1908 год) Е. И. Игнатьев пишет: “умственную самодеятельность, сообразительность и “смекалку” нельзя ни “вдолбить”, ни “вложить” ни в чью голову. Результаты надёжны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в лёгкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью”.

В предисловии к изданию 1911 г. “Роль памяти в математике” Е.И. Игнатьев пишет “в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления”.

Для извлечения квадратного корня существуют таблицы квадратов для двухзначных чисел, можно разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения. Таблицы квадратов бывает недостаточно, извлечение корня разложением на множители - трудоёмкая задача, которая тоже не всегда приводит к желаемому результату. Попробуйте извлечь квадратный корень из числа 209764? Разложение на простые множители дает произведение 2*2*52441. Методом проб и ошибок, подбором – это, конечно, можно сделать, если быть уверенным в том, что это целое число.

**Приближенные методы извлечения квадратного корня**

(без использования калькулятора)

1.Древние вавилоняне пользовались следующим способом нахождения приближенного значения квадратного корня их числа x. Число x они представляли в виде суммы $a^2+b$, где $a^2$ ближайший к числу x точный квадрат натурального числа a ($a^2$?x), и пользовались формулой $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$. (1)

Извлечем с помощью формулы (1) корень квадратный, например из числа 28:

$$\sqrt{28} = \sqrt{5^2+3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5{,}3.$$

Результат извлечения корня из 28 с помощью МК 5,2915026.

Как видим способ вавилонян дает хорошее приближение к точному значению корня.

2. Исаак Ньютон разработал метод извлечения квадратного корня, который восходил еще к Герону Александрийскому (около 100 г. н.э.). Метод этот (известный как метод Ньютона) заключается в следующем.

Пусть $a_1$ — первое приближение числа $\sqrt{x}$ (в качестве $a_1$ можно брать значения квадратного корня из натурального числа — точного квадрата, не превосходящего *x)* .

Следующее, более точное приближение $a_2$ числа $\sqrt{x}$ найдется по формуле $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right)$.

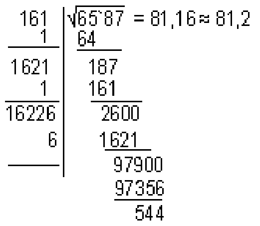
Третье, еще более точное приближение $a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{x}{a_2}\right)$ и т.д.

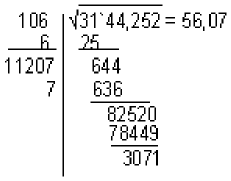
(n+1)-е приближение $\sqrt{x}$ найдется по формуле $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$.

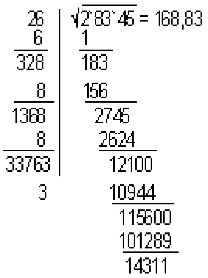
Нахождение приближенного значения числа $\sqrt{28}$ методом Ньютона дает следующие результаты: $a_1=5$; $a_2= 5{,}3$; $a_3=5{,}2915$.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$ - итерационная формула Ньютона для нахождения квадратного корня из числа x (n=2,3,4,…, $a_n$ - n-е приближение $\sqrt{x}$ .

Указанный мною способ позволяет извлекать квадратный корень из большого числа с любой точностью, правда с существенным недостатком: громоздкость вычислений.




(*http://hijos.ru/2012/04/25/krasivaya-modifikaciya-metoda-izvlecheniya-kvadratnogo-kornya/, Пичугин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 кл сш – М: Просвещение, 1990, Ткачеа М.В. Домашняя математика. Книга для учащихся 8 кл общеобразовательных учебных заведений.– М. Просвещение 1994*).

Пусть нужно извлечь квадратный корень из натурального числа $m$, причем известно, что корень извлекается. Чтобы найти результат, иногда удобно воспользоваться следующим правилом.

1. Разобьем число $m$ на грани (справа налево, начиная с последней цифры), включив в каждую грань по две рядом стоящие цифры. При этом следует учесть, что если $m$ состоит из четного числа цифр, то в первой (слева) грани будет две цифры; если же число $m$ состоит из нечетного числа цифр, то первая грань состоит из одной цифры. Количество граней показывает количество цифр результата.

2. Подбираем наибольшую цифру, такую, что ее квадрат не превосходит числа, находящегося в первой грани; эта цифра — первая цифра результата.

3. Возведем первую цифру результата в квадрат, вычтем полученное число из первой грани, припишем к найденной разности справа вторую грань. Получится некоторое число $A$. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число $a$. Теперь подберем такую наибольшую цифру $x$, чтобы произведение числа $\overline{ax}$ (запись $\overline{ax}$ означает $10 * a + x$) на $x$ не превосходило числа $A$. Цифра $x$ — вторая цифра результата.

4. Произведение числа $\overline{ax}$ на $x$ вычтем из числа $A$, припишем к найденной разности справа третью грань, получится некоторое число $B$. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число $b$. Теперь подберем такую наибольшую цифру $y$, чтобы произведение числа $\overline{by}$ на $y$ не превосходило числа $B$. Цифра $y$ — третья цифра результата.

Следующий шаг правила повторяет 4-й шаг. Это продолжается до тех пор, пока не используется последняя грань (*Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: Справ. материалы: Кн. для учащихся. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1990. — 416 с.*)

*Пример.* Вычислить $\sqrt{138384}$.

Решение. Разобьем число на грани: 13'83'84 — их три, значит, в результате должно получиться трехзначное число. Первая цифра результата 3, так как $3^2 < 13$, тогда как $4^2 > 13$. Вычтя 9 из 13, получим 4. Приписав к 4 следующую грань, получим $A$ = 483. Удвоив имеющуюся часть результата, т. е. число 3, получим $a$ = 6. Подберем теперь такую наибольшую цифру $x$, чтобы произведение двузначного числа $\overline{ax}$ на $x$ было меньше числа 483. Такой цифрой будет 7, так как 67 * 7 = 469 — это меньше 483, тогда как 68 * 8 = 544 — это больше 483. Итак, вторая цифра результата 7.

Вычтя 469 из 483, получим 14. Приписав к этому числу справа последнюю грань, получим $b$ = 1484. Удвоив имеющуюся часть результата, т.е. число 37, получим $B$ = 74. Подберем теперь такую наибольшую цифру $y$, чтобы произведение трехзначного числа $\overline{by}$ на $y$ не превосходило 1484. Такой цифрой будет 2, так как 742 * 2 = 1484. Цифра 2 — последняя цифра результата. В ответе получили 372.

$\sqrt{138384} = 372.$

Если корень не извлекается, то после последней цифры заданного числа ставят запятую и образуют дальнейшие грани, каждая из которых имеет вид 00. В этом случае процесс извлечения корня бесконечен; он прекращается, когда достигается требуемая точность.

(http://comp-science.narod.ru/DL-AR/koren.html)

## ЗАДАЧИ НА ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

1. Дорога от дома до школы идет по направлению на запад 1км 200 м, затем меняет направление на юг 500 м. Определите кратчайшее расстояние от дома до школы.
2. Лестница длиной 6,5 м приставлена к стене так, что расстояние от ее нижнего конца до стены равно 2,5 м. На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы?
3. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 17 футов, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 15 футов?
4. В 20 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 24 м, а другой – 9 м. Найдите расстояние между их верхушками.
5. Грибник, собирая грибы, отклонился от дороги северного направления на северо-запад. Определите, на каком расстоянии от дороги он будет через 1км.
6. Высота дерева 8м, котёнок сидит в 6м от дерева. Как далеко от котёнка воробей, сидящий на вершине дерева?
7. Длина удочки-телескопички 5м, а длина лески до поплавка 3м. На каком расстоянии от рыбака находится поплавок?
8. Лиса Алиса сказала коту Базилио, чтобы найти клад, надо протии 5м вперёд, потом повернуть налево и пройти еще 12м, а сама побежала напрямик. Кто первый доберётся до клада и на сколько его путь будет короче?
9. Группа туристов прошла от своего лагеря 1,6 км. строго на запад, затем 3,2 км. на север, а затем несколько километров на восток и остановилась на ночлег. Точка ночлега находилась в 6,4 км. от их лагеря. Сколько километров туристы шли в восточном направлении?

## ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**Задача Бхаскари**

«На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в этом месте река
В четыре лишь фута была широка
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола,
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?»

Решение: По теореме Пифагора $AB^2= BC^2+AC^2$; 9+16=25, AB=5 Футов; CD=3+5=8 футов. Ответ: высота тополя 8 футов.

**Задача из китайской «Математики в девяти книгах».**

«Имеется водоем со стороной в 1 чжан = 10 чи. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснётся его. Спрашивается: какова глубина воды, и какова длина камыша?».

Решение: По теореме Пифагора $(x+1)^2=x^2+25$; 2x=24, x=12 чи.; 12+1=13 чи. Ответ: глубина воды-12 чи, длина камыша-13 чи.

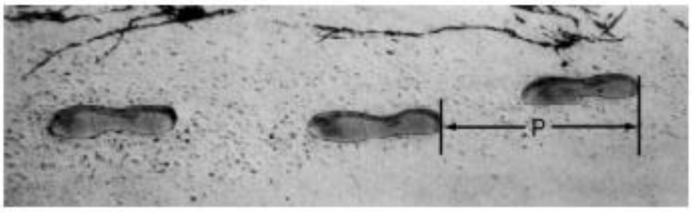
**Задача из учебника «Арифметика» Леонтия Магницкого**.

«Случися некому человеку к стене лестницу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обреете лестницу долготю 125 стоп. И ведати хочет, колико стоп сея лестницы нижний конец от стены отстояти имать». *Решение:* $BC^2=AB^2-AC^2$; $BC^2$=15625-13689=44 стоп. *Ответ:* BC=44 стоп.

1. З*адача о бамбуке из древнекитайского трактата "Гоу-гу"*
   Имеется бамбук высотой в 1 чжан. Вершину его согнули так, что она касается земли на расстоянии 3 чи от корня (1 чжан = 10 чи).Какова высота бамбука после сгибания? *Решение:* $(10-x)^2=x^2-9$; -20x=9-100, -20x=-109, x=109/20 чи. *Ответ:* x= 4,55 чи.

### Задачи

1. **Походка**




На рисунке изображены следы идущего человека. Длина шага P — расстояние от конца пятки следа одной ноги до конца пятки следа другой ноги. Для походки мужчин зависимость между n и P приближенно выражается формулой n/P=140, где n — число шагов в минуту, P —длина шага в метрах.

*Вопрос* 1.(01) Используя данную формулу, определите, чему равна длина шага Сергея, если он делает 70 шагов в минуту.

*Вопрос* 2.(012) Павел знает, что длина его шага равна 0,80 м. Используя данную выше формулу, вычислите скорость Павла при ходьбе в метрах в минуту (м/мин), а затем в километрах в час (км/ч).

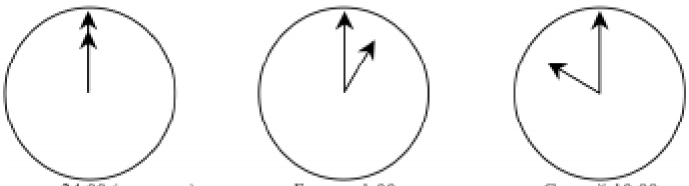
2. **Кубики**

*Вопрос*.(01)На фотографии видны 6 кубиков, обозначенных буквами от a до f. Для каждого из них выполняется следующее правило: сумма кружков, изображенных на двух любых противоположных гранях кубика, всегда равна семи. В каждой клетке таблицы запишите число кружков, которые изображены на нижней грани соответствующего кубика.

| (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| (d) | (e) | (f) |

3. **Общение в интернете**

Марк (из Сиднея в Австралии) и Ганс (из Берлина в Германии) часто общаются друг с другом в Интернете. Им приходится выходить в Интернет в одно и то же время, чтобы они смогли поболтать. Чтобы определить удобное для общения время, Марк просмотрел таблицы, в которых дано время в различных частях мира, и нашел следующую информацию:



Гринвич 24:00 (полночь) Берлин 1:00 Сидней 10:00

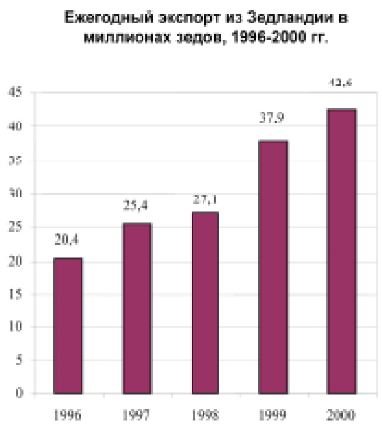
*Вопрос* 1(01). Какое время в Берлине, если в Сиднее 19:00?

*Вопрос* 2. (0123)Марк и Ганс не могут общаться между 9:00 и 16:30 по их местному времени, так как они в это время должны находиться в школе. Они также не могут общаться с 23:00 до 7:00 по их местному времени, так как в это время они спят. Какое время было бы удобно для мальчиков, чтобы они могли поболтать? Укажите в таблице местное время для каждого города.

| Город | Время |
|---|---|
| Сидней | |
| Берлин | |

4. **Экспорт**

На диаграммах представлена информация об экспорте из Зедландии — страны, в которой в качестве денежной единицы используют зед.

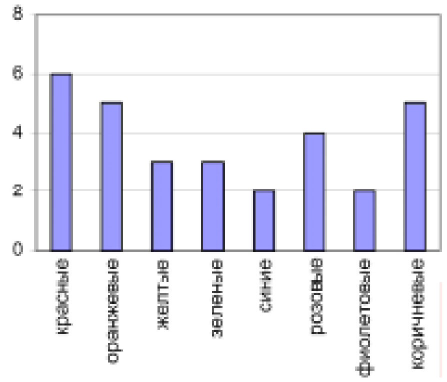



*Вопрос* 1.(01) Какова общая стоимость (в миллионах зедов) экспорта из Зедландии в 1998 г.?

*Вопрос* 2. (01)Какова стоимость фруктового сока, который экспортировали из Зедландии в 2000 г.?

5. **Цветные конфеты**

*Вопрос*.(01) Мама Роберта разрешила ему вынуть из коробки одну конфету, не заглядывая в коробку. Число конфет различного цвета в коробке показано на диаграмме.




Какова вероятность того, что Роберт вынет красную конфету?

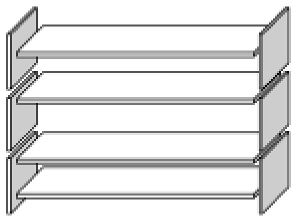
10 % B. 20 % C. 25 % D. 50 %

6. **Тесты по географии**

ВОПРОС. (01)У Игоря в школе учитель географии предлагает учащимся тесты и выполнение каждого из них оценивает из 100 баллов. Средняя оценка Игоря за четыре первых теста равна 60 баллам. По пятому тесту он получил 80 баллов. Чему равна средняя оценка Игоря за пять тестов по географии?

7. **Книжные полки**

*Вопрос*.(01) Чтобы собрать один комплект книжных полок, плотнику нужны следующие детали:



− 4 длинных деревянных панели,
− 6 коротких деревянных панелей,
− 12 маленьких скоб,
− 2 больших скобы и
− 14 шурупов.

У плотника есть 26 длинных деревянных панелей, 33 коротких панели, 200 маленьких скоб, 20 больших скоб и 510 шурупов. Какое наибольшее число комплектов книжных полок может собрать из этих деталей плотник?

8. **Землетрясение**

*Вопрос*.(01) В документальном фильме рассказывалось о землетрясениях и о том, как часто они происходят. В фильме также была показана дискуссия о возможности предсказания землетрясений. Геолог утверждал: «Шансы на то, что в последующие 20 лет в городе Зеде произойдёт землетрясение, составляют два из трёх». Какое из следующих рассуждений правильно передаёт смысл утверждения геолога?

A. $\frac{2}{3}\cdot 20=13{,}3$ поэтому между 13 и 14 годами от настоящего момента в городе Зеде произойдёт землетрясение.

B. $\frac{2}{3}$ больше, чем $\frac{1}{2}$, поэтому можно быть уверенным, что когда-нибудь в течение 20 следующих лет в городе Зеде произойдёт землетрясение.

C. Вероятность того, что когда-нибудь в следующие 20 лет в городе Зеде произойдёт землетрясение, больше, чем вероятность того, что оно не произойдёт.

D. Невозможно сказать о том, что может случиться, потому что никто точно не знает, когда произойдёт землетрясение.

9. **Выбор**

*Вопрос*.(01) В пиццерии всегда можно получить пиццу с двумя обязательными начинками: сыром и помидорами. Но можно заказать пиццу по своему рецепту с дополнительными начинками. Вы можете выбрать из четырёх различных дополнительных начинок: оливок, ветчины, грибов и колбасы. Вера хочет заказать пиццу с двумя дополнительными начинками. Сколько у Веры вариантов выбора различных комбинаций из предлагаемых дополнительных начинок?

10. **Тестовые оценки**

*Вопрос*.(01) Ниже на столбчатой диаграмме представлены результаты выполнения теста по биологии группами учащихся, обозначенными как Группа А и Группа В. Средняя оценка группы А равна 62,0 и средняя оценка Группы В равна 64,5. Считается, что учащийся справился с тестом, если его оценка 50 или более баллов. Посмотрев на диаграмму, учительница сделала вывод о том,что Группа В выполнила тест лучше, чем Группа А.


Учащиеся Группы А не согласны с её мнением. Они стараются убедить учительницу в том, что учащиеся Группы В не обязательно выполнили тест лучше них. Используя диаграмму, приведите один математический довод, которым могли бы воспользоваться учащиеся Группы А.

Ответы

1. *Вопрос* 1. 0,5 метра.
   *Вопрос* 2. 89,6 м/мин., 5,376 км/ч.
2. *Вопрос* 1.

| a | b | c |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 |
| 2 | 6 | 5 |
| d | e | f |

3. *Вопрос* 1. 10:00.
   *Вопрос* 2.

| Город | Время |
|---|---|
| Сидней | с 7:00 до 8:00, с 16:30 до 18:00 |
| Берлин | с 22:00 до 23:00, с 7:30 до 9:00 |

4. *Вопрос* 1. 27,1 млн. зедов.
   *Вопрос* 2. 3,8 миллионов зедов
5. *Вопрос* 1. В.
6. *Вопрос* 1. 64.
7. *Вопрос* 1. 5.
8. *Вопрос* 1. С.
9. *Вопрос* 1. 6.

10. *Вопрос* 1. Доводы могут быть следующие. 1) В группе А только один ученик не справился с тестом, а в группе В — двое (те, кто набрал менее 50 баллов). 2) В то же время число учеников, набравших более 80 баллов, в группе А — двое, а в группе В — только один. 3) Если не рассматривать самого слабого ученика, набравшего менее 10 баллов, то средний балл группы А будет больше среднего балла группы В. Можно использовать любой из приведённых доводов.
(http://matica.org.ua/lineynaya-algebra-i-analiticheskaya-geometriya/4-1-8-primeri-resheniya-zadach-po-teme-uravnenie-pryamoy-na-ploskosti)

## УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

*Условие параллельности.*

Если прямые линии параллельны, то они наклонены к числовой оси ОХ под одним и тем же углом, следовательно, разница углов наклона параллельных прямых равна нулю (действительно они никогда не пересекаются). Тангенс угла в ноль градусов (ноль радиан) равен нулю.

$k_2 = k_1$

Это и есть условие параллельности двух прямых линий.

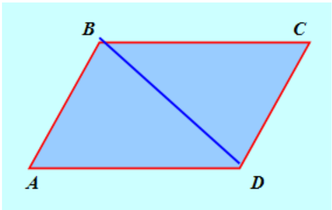
*Условие перпендикулярности.*

Если две прямых линии взаимно перпендикулярны, то угол между ними равен $90^0$ или $\frac{\pi}{2}$ радиан. Тангенс такого угла не существует (иногда говорят, что он равен бесконечности) $k_2 \cdot k_1 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$ является условием перпендикулярности заданных прямых.

**Примеры решения задач по теме «Уравнение прямой на плоскости»**

*Задача 1.* Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $2X + У + 3 = 0$ и $2X – 5У + 9 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $2X – y - 3 = 0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.

*Решение:*




Выясним, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \neq \frac{A_1}{A_2},$$

Следовательно, прямые пересекаются, то есть даны уравнения смежных сторон параллелограмма.

*Условие параллельности прямых*

$A_1x + B_1У + C_1 = 0$ *и* $A_2X + B_2У + C_2 = 0$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть даны уравнения сторон *AB* и *AD*. Тогда координаты точки *A* будут решением системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+y+3=0\\2x-5y+9=0\end{cases}\Rightarrow 6y-6=0\Rightarrow y=1,\ x=-2\Rightarrow A(1;-2).$$

Теперь определим, уравнение какой диагонали: *AC* или *BD* – нам известно. Если это диагональ *AC*, то на ней лежит точка *A*, следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению диагонали. Проверим:

$$2\cdot 1-(-2)-3=1\neq 0.$$

Значит, точка *A* не лежит на данной прямой, то есть дано уравнение диагонали *BD*. Тогда вершина *B* лежит на прямых *AB* и *BD*, значит, ее координаты найдем из системы:

$$\begin{cases}2x+y+3=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=-3\Rightarrow B(0;-3).$$

Система уравнений для определения координат точки *D* составлена из уравнений прямых *AD* и *BD*:

$$\begin{cases}2x-5y+9=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow -4y+12=0,\ y=3,\ x=3\Rightarrow D(3;\ 3).$$

Остается найти координаты точки *C*. Составим уравнения прямых *BC* и *DC*.
Поскольку *BC* параллельна *AD*, их угловые коэффициенты равны. Найдем угловой коэффициент прямой *AD*:

$$5y=2x+9,\ y=\frac{2}{5}x+\frac{9}{5}\Rightarrow k_{AD}=\frac{2}{5}=k_{BC}.$$

Тогда *BC* можно задать уравнением

$$y-y_B=k_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y+3=\frac{2}{5}x,\ 2x-5y-15=0.$$

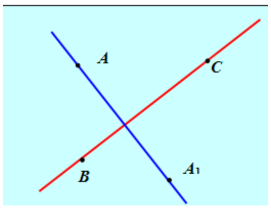
Аналогично *AB*: $Y=-2X-3$, $KAB=-2=KDC$; *DC*: $Y-3=-2(X-3)$, $2X+Y-9=0$.
Найдем координаты точки *C*, решив систему из двух полученных уравнений:

$$\begin{cases}2x-5y-15=0\\2x+y-9=0\end{cases}\Rightarrow -6y-6=0,\ y=-1,\ x=5\Rightarrow C(5;-1).$$

*Ответ:* *A*(1; -2), *B*(0; -3), *C*(5; -1), *D*(3; 3).

*Задача 2.* Найти точку, симметричную точке *A*(2; 1) относительно прямой, проходящей через точки *B*(-1; 7) и *C*(1; 8).

*Решение:*




Представим себе, что нам нужно построить искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

1) провести прямую *BC*;

2) провести через точку $A$ прямую, перпендикулярную $BC$;

3) найти точку $O$ пересечения этих прямых и отложить на прямой $AO$ по другую сторону прямой $BC$ отрезок $OA_1$ $=AO$.

Тогда точка $A_1$ будет симметричной точке $A$ относительно прямой $BC$.

Теперь заменим каждое из действий составлением уравнений и вычислением координат точек.

1) Найдем уравнение прямой $BC$ в виде:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}\Rightarrow\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-7}{8-7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{y-7}{1}\Rightarrow x-2y+15=0.$$

2) Найдем угловой коэффициент прямой $BC$:

$$2y=x+15,\ y=\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\Rightarrow k_{BC}=\frac{1}{2}.$$

Прямая $AO$ Перпендикулярна прямой $BC$, поэтому

$$k_{AO}=-\frac{1}{k_{BC}}=-2.$$

Составим уравнение прямой $AO$:

$$y-y_A=k_{AO}(x-x_A)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-1=-2(x-2)\Rightarrow 2x+y-5=0.$$

3) Найдем координаты точки $O$ как решение системы:

$$\begin{cases}x-2y+15=0\\ 2x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow 5x+5=0,$$

$$x=-1,\ y=7\Rightarrow O(-1;7).$$

4) Точка $O$ – середина отрезка $AA_1$, поэтому

$$x_O=\frac{x_A+x_{A_1}}{2},\ y_O=\frac{y_A+y_{A_1}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{A_1}=2x_O-x_A=-2-2=-4;$$

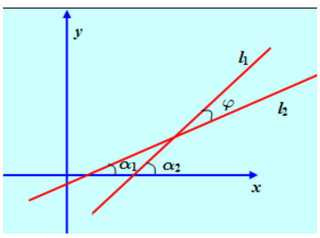
$$y_{A_1}=2y_O-y_A=14-1=13\Rightarrow O(-4;13).$$

*Ответ:* (-4; 13).

*Задача 3.* Найти угол между прямыми $l_1$: $3x-y+5=0$ и $l_2$: $2x+y-7=0$.

*Решение:*

*A*




Если $j$ – угол между прямыми $l_1$ и $l_2$, то $j$ = $a$2 - $a$1, где $a_2$ и $a_1$ – углы, образованные прямыми $l_1$ и $l_2$ с положительной полуосью $Ox$. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

Где $k_1$ и $k_2$ – угловые коэффициенты прямых $l_1$ и $l_2$. Найдем $k_1$ и $k_2$: для $l_1$ $y = 3x + 5$, $k_1 = 3$; для второй: $y = -2x + 7$, $k_2 = -2$. Следовательно,

$$tg\varphi = \frac{-2-3}{1-2\cdot 3} = 1,\ \varphi = 45°.$$

*Ответ: 45°.*

*Для прямых* $A_1x + B_1У + C_1 = 0$ *и* $A_2X + B_2У + C_2 = 0$

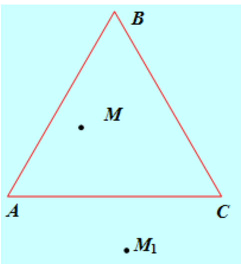
*Справедлива формула:*

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

*Задача 4.* Определить, лежит ли точка $M(2;\ 3)$ внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$.

*Указание:* Если точка $M$ расположена внутри треугольника $ABC$, то ее отклонение $\delta$ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне, а если точка $M$ лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника.

*Решение:*




Пусть первое уравнение задает сторону $AB$, второе – $BC$, третье – $AC$. Найдем координаты точек $A$, $B$ и $C$:

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ x + 5y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7 \\ x + 20x - 35 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow A(2;\ 1).$$

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7 \\ x + 12x - 21 - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4,\ y = 9 \Rightarrow B(4;\ 9).$$

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y + 24 = 0,$$

$$y = -12,\ x = 67 \Rightarrow C(67; -12).$$

Для ответа на вопрос задачи отметим, что:

1) если точка $M$ расположена внутри треугольника $ABC$, то ее отклонение $\delta$ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне (т.е. точка $M$ расположена относительно каждой стороны треугольника в одной полуплоскости с третьей вершиной);

2) если точка $M$ лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника (на рисунке: точки $M_1$ и $B$ расположены по разные стороны от прямой $AC$).

Составим нормальные уравнения сторон треугольника $ABC$:

$$AB:\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17},\ c<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{17}},\ AB:\ \frac{4}{\sqrt{17}}x-\frac{1}{\sqrt{17}}y-\frac{7}{\sqrt{17}}=0;$$

$$BC:\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10},\ c<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{10}},\ BC:\ \frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{31}{\sqrt{10}}=0;$$

$$AC:\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{26},\ c<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{26}},\ AC:\ \frac{1}{\sqrt{26}}x+\frac{5}{\sqrt{26}}y-\frac{7}{\sqrt{26}}=0.$$

Вычислим соответствующие отклонения:

1) для точек $M$ и $A$ относительно прямой $BC$:

$$\delta_M=\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{9}{\sqrt{10}}-\frac{31}{\sqrt{10}}=-\frac{20}{\sqrt{10}}<0;$$

$$\delta_A=\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{31}{\sqrt{10}}=-\frac{26}{\sqrt{10}}<0.$$

2) для точек $M$ и $B$ относительно прямой $AC$:

$$\delta_M=\frac{2}{\sqrt{26}}+\frac{15}{\sqrt{26}}-\frac{7}{\sqrt{26}}=\frac{10}{\sqrt{26}}>0;$$

$$\delta_B=\frac{4}{\sqrt{26}}+\frac{45}{\sqrt{26}}-\frac{7}{\sqrt{26}}=\frac{42}{\sqrt{26}}>0.$$

3) для точек $M$ и $C$ относительно прямой $AB$:

$$\delta_M=\frac{8}{\sqrt{17}}-\frac{3}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{\sqrt{17}}<0;$$

$$\delta_C=\frac{168}{\sqrt{17}}+\frac{12}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=\frac{173}{\sqrt{17}}>0.$$

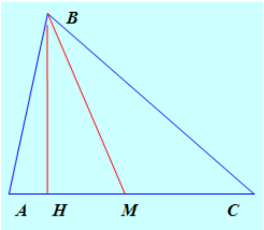
Итак, точки $M$ и $C$ лежат по разные стороны от прямой $AB$. Следовательно, точка $M$ расположена вне треугольника $ABC$.

*Ответ:* Точка $M$ расположена вне треугольника $ABC$.

*Задача 5.* Для треугольника $ABC$ с вершинами $A(-3;\ -1)$, $B(1;\ 5)$, $C(7;\ 3)$ составить уравнения медианы и высоты, выходящих из вершины $B$.

*Указание:* Составьте уравнение медианы как прямой, проходящей через точки $B$ и $M$ – середину стороны $AC$, а высоты – как прямой, проходящей через точку $B$ и перпендикулярной стороне $AC$.

*Решение:*




1) Медиана $BM$ проходит через точку $B$ и точку $M$ – середину отрезка $AC$. Найдем координаты точки $M$:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Тогда уравнение медианы можно записать в виде:

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B} \Rightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-5}{1-5} \Rightarrow 4x + y - 9 = 0.$$

2) Высота $BH$ перпендикулярна стороне $AC$. Составим уравнение $AC$:

$$\frac{x+3}{7+3} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow 2x - 5y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5},$$

$$k_{AC} = \frac{2}{5},\ k_{BH} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{5}{2}.$$

$$BH:\ y - 5 = -\frac{5}{2}(x-1) \Rightarrow 5x + 2y - 15 = 0.$$

*Ответ:* медиана $BM$: $4X + У - 9 = 0$; высота $BH$: $5X + 2У - 15 = 0$.

*Задача 6.* Определить, при каком значении $A$ прямая

$(A - 5)X + (A_2 - 1)У + 2A_2 + 7A - 9 = 0$

Параллельна оси ординат. Написать уравнение прямой.

*Указание:* Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$.

*Решение:* Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$. Из условия $B = 0$ получаем: $A_2 - 1 = 0$, $A = \pm 1$.

При $A = 1$ $C = 2 + 7 - 9 = 0$ – второе условие не выполняется (получившаяся при этом прямая $-4X = 0$ не параллельна оси $Oy$, а совпадает с ней).

При $A = -1$ получим: $-6X - 14 = 0$, $3X + 7 = 0$.

*Ответ:* $3X + 7 = 0$ при $A = -1$;

*Задача 7.* Составить уравнения всех прямых, проходящих через точку $M(2;\ 3)$ и отсекающих от координатного угла треугольник площадью 12.

*Указание:* Составьте уравнение искомой прямой «в отрезках»:

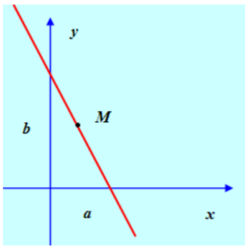
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

Где $|A|$ и $|B|$ - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| = 12,$$

Откуда $|Ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2;\ 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках».

*Решение:*




Составим уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

Где $|A|$ и $|B|$ - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=12,$$

Откуда $|Ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2;\ 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках». Таким образом, для $A$ и $B$ можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\\ |ab|=24\end{cases}.$$

1) $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\\ ab=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{24}{a}\\ \frac{2}{a}+\frac{a}{8}=1\end{cases}\Rightarrow a^2-8a+16=0,\ a=4,\ b=6.$

2) $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\\ ab=-24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{24}{a}\\ \frac{2}{a}-\frac{a}{8}=1\end{cases}\Rightarrow a^2+8a-16=0,$

$$a=-4\pm4\sqrt{2},\ b=-\frac{24}{-4\pm4\sqrt{2}}=-6(1\mp\sqrt{2}).$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют три прямые:

1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1\Rightarrow 3x+2y-12=0;$

2) $-\frac{x}{4(1+\sqrt{2})}-\frac{y}{6(1-\sqrt{2})}=1\Rightarrow 3(1-\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})y-12=0;$

3) $-\frac{x}{4(1-\sqrt{2})}-\frac{y}{6(1+\sqrt{2})}=1\Rightarrow 3(1+\sqrt{2})x+2(1-\sqrt{2})y-12=0.$

*Ответ:*

$3x+2y-12=0;$

$3(1-\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})y-12=0;$

$3(1+\sqrt{2})x+2(1-\sqrt{2})y-12=0.$

(http://mathhelpplanet.com/gallery/image.php?pic_id=908)

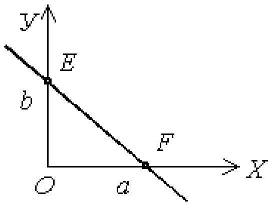
## УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C=0$. Перенесем свободный член $C$ в правую сторону и разделим обе части полученного уравнения на $(-C)$.

$$Ax+By=-C \Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Обозначим: $-\frac{C}{A}=a, \quad -\frac{C}{B}=b$ и получим уравнение "в отрезках"

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.3)$$




Здесь $a$ и $b$ – это отрезки, которые отсекает прямая от координатных осей . Действительно, пусть

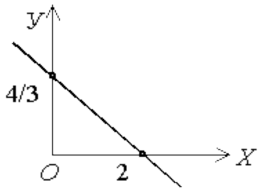
$$y=0 \Rightarrow \frac{x}{a}=1 \Rightarrow x=a;$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{y}{b}=1 \Rightarrow y=b.$$

Тогда точки пересечения прямой с координатными осями - $F$ $(a, 0)$ и $E$ $(0, b)$ .

*Задача 1.* Прямая задана общим уравнением $2x - 3y - 4 = 0$. Найти уравнение прямой "в отрезках" и построить эту прямую.

*Решение.* Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим на него обе части уравнения:




$$2x-3y=4 \Rightarrow \frac{2x}{4}-\frac{3y}{4}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{y}{4/3}=1,$$

т.е. $a=2, \quad b=\frac{4}{3}$.

*Ответ:* $\frac{x}{2}-\frac{y}{4/3}=1$.

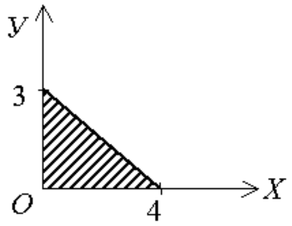
*Задача 2***.** Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x + 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

*Решение.* Найдем отрезок $a$ и $b$, отсекаемый прямой от координатных осей:

$$3x+4y=12 \Rightarrow \frac{3x}{12}-\frac{4y}{12}=1 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow$$

$$a=4; b=3.$$

Найдем площадь заштрихованного прямоугольного треугольника




$$S=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$$

*Ответ:* S = 6 кв. ед.

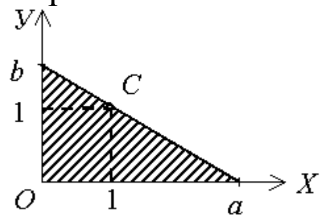
*Задача 3.* Составить общее уравнение прямой, которая проходит через точку $C(1,1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 2 кв. ед. в первой четверти (рис. 43).

*Решение.* Будем искать уравнение прямой “в отрезках”:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, причем $a>0$ и $b>0$.

Так как точка $C(1, 1)$ принадлежит этой прямой, то ее координаты ($x=1$, $y=1$) будут удовлетворять уравнению этой прямой:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow b+a=a\cdot b.$$




Площадь заштрихованного треугольника $S=\frac{1}{2}a\cdot b=2$. Тогда получим два уравнения относительно неизвестных $a$ и $b$:

$$\begin{cases}a\cdot b=4\\ a+b=a\cdot b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=4\Rightarrow a=4-b\Rightarrow(4-b)\cdot b=4\\ b^2-4b-4=0\Rightarrow b=2\pm\sqrt{4-4}=2\end{cases}\Rightarrow\quad b=2,$$

тогда $a=\frac{4}{b}=\frac{4}{2}=2$ и уравнение прямой “в отрезках” имеет вид

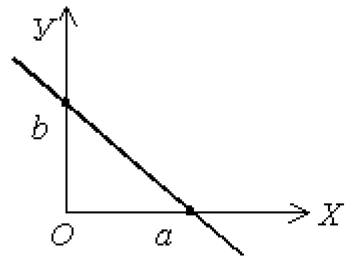
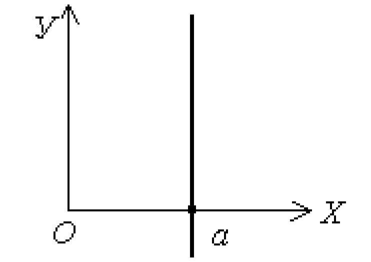
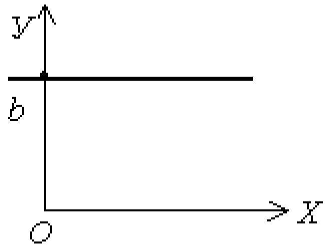
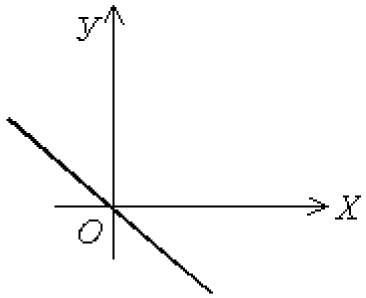
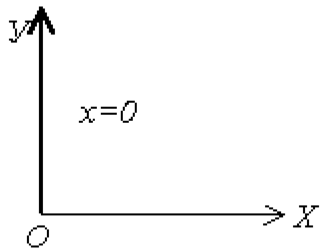
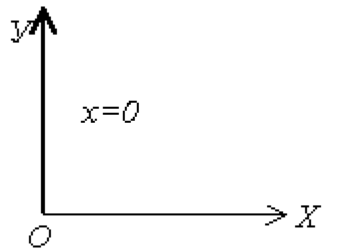
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1\Rightarrow x+y=2.$$

Тогда общее уравнение прямой x + y - 2 = 0.

*Ответ:* x + y - 2 = 0.

Проведем исследование уравнения прямой, когда в нем отсутствуют некоторые члены. Результаты исследования и геометрическая иллюстрация приведены в таблице.

| Вид уравнения | Геометрическая иллюстрация | Вид уравнения | Геометрическая иллюстрация |
|---|---|---|---|

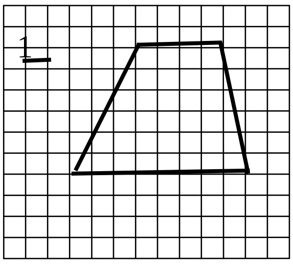
| | | | |
|---|---|---|---|
| $Ax+By+C=0$<br>$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$<br>$A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$ |  | $Ax+C=0$<br>$\frac{x}{a}=1, \quad x=a$<br>$A\neq 0, B=0, C\neq 0$ | <br>прямая параллельна оси *ОУ* |
| $By+C=0$<br>$\frac{y}{b}=1, \; y=b$<br>$A=0, B\neq 0, C\neq 0$ | <br>прямая параллельна оси *ОХ* | $Ax+By=0$<br>$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$<br>$ay=-bx, \; y=-\frac{b}{a}x$<br>$A\neq 0, B\neq 0, C=0$ | <br>прямая проходит через начало координат |
| $Ax=0$<br>$x=0$<br>$A\neq 0, B=0, C=0$ | <br>ось *ОУ* | $By=0$<br>$y=0$<br>$A=0, B\neq 0, C=0$ | <br>ось *ОХ* |

*Выводы:*

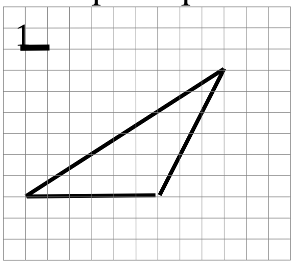
1. Если в уравнении прямой присутствуют все члены, то прямая пересекает координатные оси и отсекает от них отрезки a и b.
2. Если в уравнении прямой отсутствует свободный член, то прямая проходит через начало координат.
3. Если в уравнении прямой отсутствует член, содержащий x или y, то прямая проходит параллельно оси отсутствующей координаты.

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР, ИЗОБРАЖЕННЫХ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ.

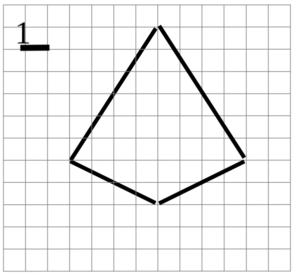
1. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см$\times$1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



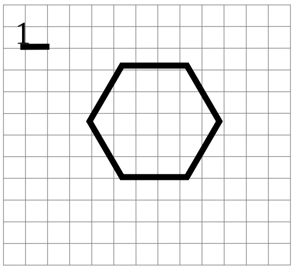

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



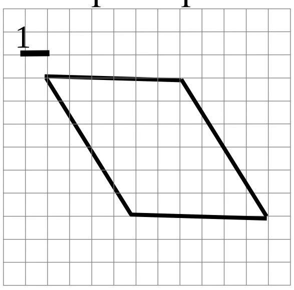

3. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



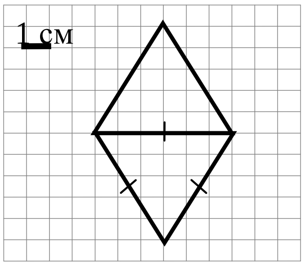

4. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



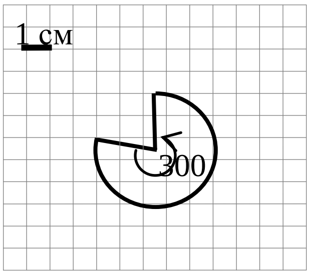

5. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



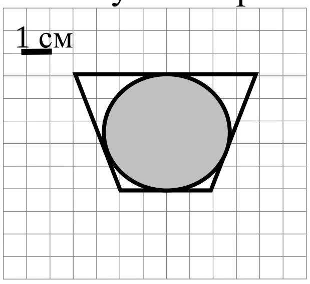

6. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



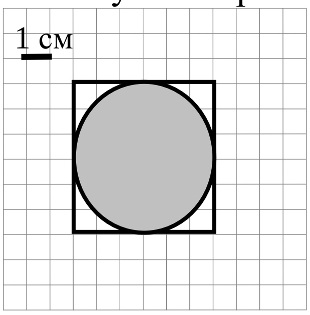

7. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



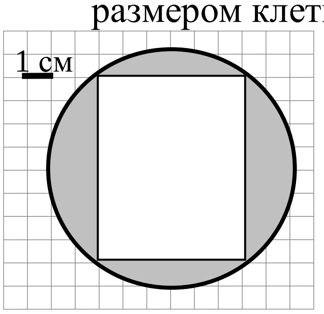

8. Найдите площадь не закрашенной части фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




9. Найдите площадь не закрашенной части фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




10. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ

Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$; $y = |f(|x|)|$; $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)|$.

*Цели:* научить учащихся строить графики, содержащие модуль; закрепить изученный материал в ходе выполнения упражнений.

Когда в «стандартные» функции, которые задают прямые, параболы, гиперболы, включают знак модуля, их графики становятся необычными. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приемами построения графиков элементарных функций, а также твердо знать и понимать определение модуля числа.

*Методические рекомендации.* Для построения всех типов графиков учащимся достаточно хорошо понимать определение модуля и знать виды простейших графиков, изучаемых в школе. Целесообразно рассматривать построение графиков в следующей последовательности: $y= f(|x|)$; $y = |f(x)|$; $y = |f(|x|)|$; $|y| = |f(x)|$. Построение графиков следует осуществлять двумя способами: 1) на основании определения модуля; 2) на основании правил (алгоритмов) геометрического преобразования графиков функций.

*Построение графика функции $y = f(|x|)$.*

График функции $y = f(|x|)$ состоит из двух графиков: $y = f(x)$ – в правой полуплоскости, $y =f(–x)$ – в левой полуплоскости. Исходя из этого, можно сформулировать правило (алгоритм). График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: при $x >0$ график сохраняется, а при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси *ОУ*.

*Пример.* Построить график функции $y = 2 |x| – 2$.

*Построение:*

1-й с п о с о б: $y= 2 |x| – 2$

2-й с п о с о б: а) Строим график функции $y = 2x – 2$ для $x > 0$.б) Достраиваем его левую часть для $x <0$, симметрично построенной относительно оси *ОУ*.

*Задание.* Построить график функции: $y= |x| – 6$; $y= x^2– |x| – 6$.

График функции $y = |f(x)|$. Отсюда вытекает алгоритм построения графиков функции $y = |f(x)|$.

а) Строим график функции $f(x)$.

б) Часть графика $y = f(x)$, лежащая над осью *ОХ*, сохраняется, часть его, лежащая под осью *ОХ*, отображается симметрично относительно оси *ОХ*.

*Пример.* Построить график функции $y = |x – 2|$.

1. *Построение:* а) Строим график функции $y = x – 2$.б) График нижней полуплоскости отображаем вверх симметрично относительно оси *ОХ*.

2. $y = |x – 2|$

*Задание*. Самостоятельно построить график функции:

$y= |x – 6|$ ; $y= |x^2– x – 6|$

Построение графика функции $y = |f(|x|)|$. Правило (алгоритм) построения*:* чтобы построить график функции $y = |f(|x|)|$, надо сначала построить график функции $y = f(x)$ при $x > 0$, затем при $x < 0$ построить изображение, симметричное ему относительно оси *ОУ*, а затем на интервалах, где $f(|x|)<0$, построить изображение, симметричное графику $f(|x|)$ относительно оси *ОХ*.

*Пример.* Построить график функции $y = |1 – |x||$.

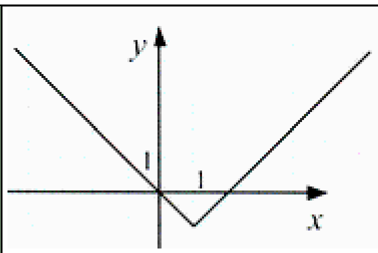
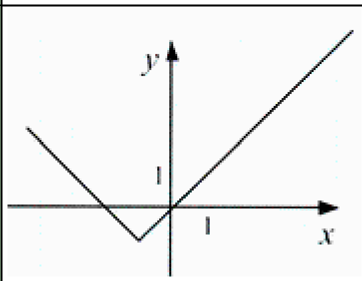
*Построение:*1. 1). Строим график функции $y = 1 - x$. 2) График функции $y = 1 - |x|$, получаем из графика функции $y = 1 - x$ отражением симметрично (при $x > 0$) относительно оси *ОУ*. 3) График функции $y = |1 - |x||$, получаем из графика функции $y = 1 - |x|$ отображением симметрично оси *ОХ* нижней части графика.
*Задание*. Самостоятельно построить график функции:
$y = ||x| - 6|$; $y = |x^2 - |x| - 6|$.

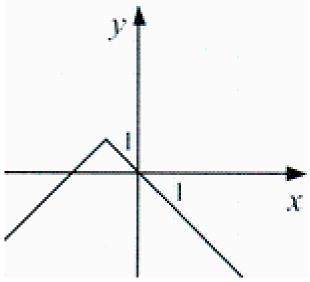
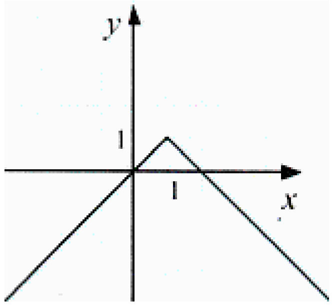
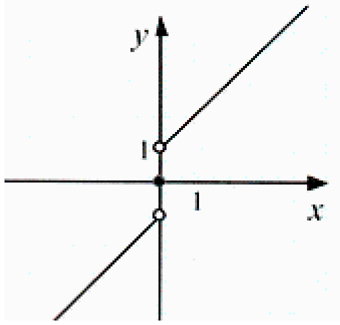
**Задания на соответствие к разделу «Преобразование графиков функций, содержащих модуль»**

1. Установите соответствие между геометрическими преобразованиями графика функции $y = |x|$ **(1−4)** и функциями, полученными в результате этих преобразований **(А−Д)**.

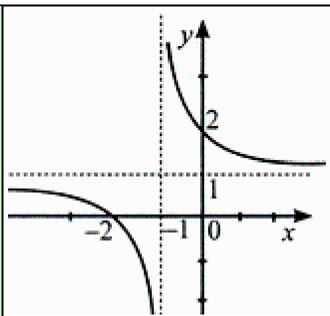
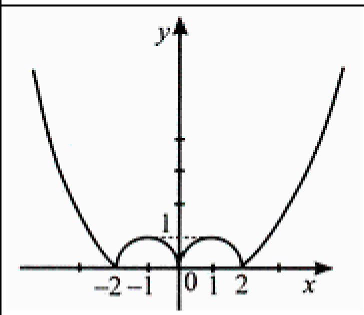
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | График функции $y = \|x\|$ параллельно перенесли вдоль оси *Oy* на две единицы вверх | А | $y = \|x\| + 2$ |
| 2 | График функции $y = \|x\|$ растянули от оси *Ox* в два раза | Б | $y = \|x + 2\|$ |
| 3 | График функции $y = \|x\|$ параллельно перенесли вдоль оси *Ox* на две единицы влево | В | $y = -\|x - 2\|$ |
| 4 | График функции $y = \|x\|$ симметрично отобразили относительно оси *Ox*, а затем параллельно перенесли дволь оси *Oy* вниз на две единицы | Г | $y = 2 \cdot \|x\|$ |
| | | Д | $y = -\|x\| - 2$ |

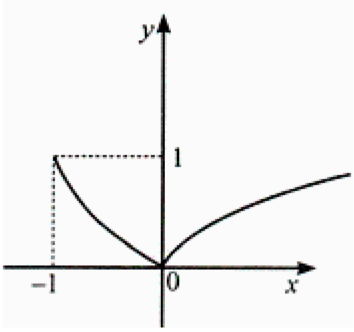
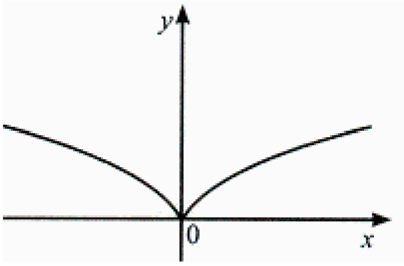
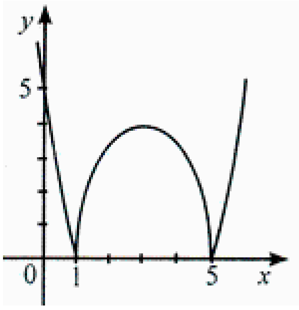
2. Установите соответствие между данными функциями (**1 − 4**) и их графиками (**А − Д**).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $y = \|x + 1\| - 1$ | А |  |
| 2 | $y = \|x - 1\| - 1$ | Б |  |

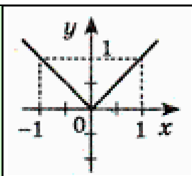
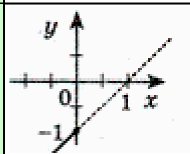
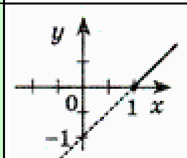
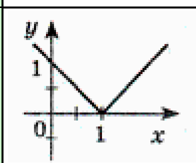
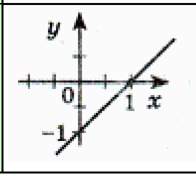
| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $y = 1 - \lvert x + 1 \rvert$ | В |  |
| 4 | $y = 1 - \lvert x - 1 \rvert$ | Г |  |
| | | Д |  |

3. Установите соответствие между данными функциями (**1−4**) и их рафиками (**А − Д**).

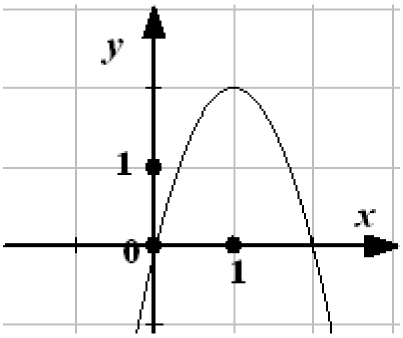
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $y = \lvert x^2 - 6x + 5 \rvert$ | А |  |
| 2 | $y = \sqrt{\lvert x \rvert + 1} - 1$ | Б |  |

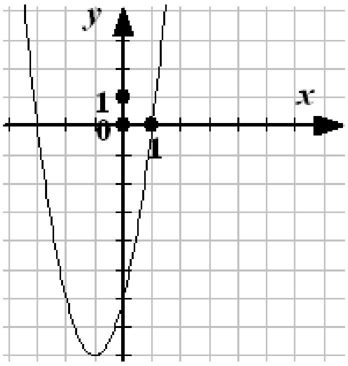
| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $y = \|\sqrt{x+1} - 1$ | В |   |
| 4 | $y = \|x^2 - 2\|x\|\|$ | Г |   |
| | | Д |   |

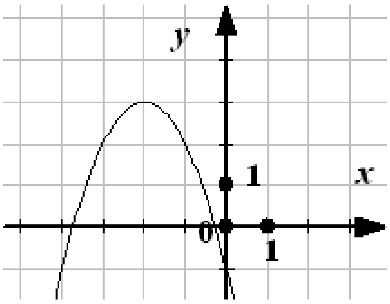
*4.* Установите соответствие между данными функциями (**1 − 4**) и их графиками (**А − Д**).

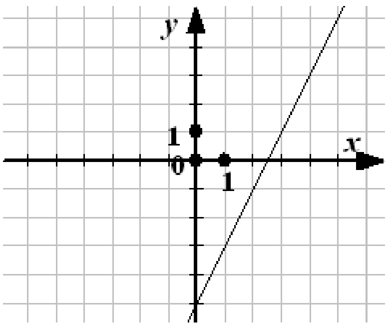
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $y = x - 1$ | А |   |
| 2 | $y = \sqrt{(x-1)^2}$ | Б |   |
| 3 | $y = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$ | В |   |
| 4 | $y = \|x - 1\|$ | Г |   |
| 5 | | Д |   |

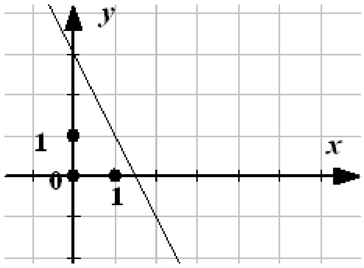
**Найти уравнения графиков**.

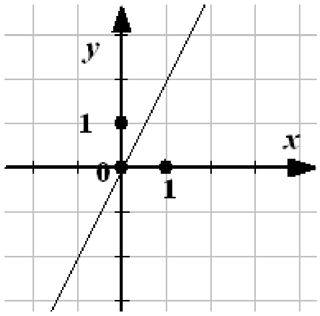
1.



2.



3.



4.



5.



6.


# 9 КЛАСС

## МНОГОЧЛЕНЫ

1. Разложите на множители многочлены:
а) $x^4 + x^2 + 1$;
б) $x^4 + 1$;
в) $20x^2 - 45y^2 + 30y - 5$.
2. Докажите, что при любом натуральном $n$ значение выражения:
а) $(3n+2)^2 - (3n+1)^2$ *кратно* $3$;
б) $(n+2)^2 - (n-1)^2$ *не кратно* $6$.
3. а) Выполните деление многочлена $(2x^3 + 3)$ на многочлен $(x^3 + x)$;
б) Выполните деление многочлена $(8x^3 + 36x^2 + 54x + 27)$ на многочлен $(2x + 3)$;
в) Из дроби $\frac{2x^6 - x^5 + 12x^3 - 72x^2 + 3}{x^3 + 2x^2 - 1}$ выделите целую и дробную часть.

*4. Теорема Безу. Схема Горнера*

*<u>Определение.</u>* Уравнение $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$, где n – натуральное число, a - произвольные постоянные коэффициенты, называется целым рациональным уравнением n – й степени.

*Теорема.* Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

*Теорема Безу.* Остаток от деления многочлена $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$ на двучлен x-a равен P(a).

Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления с помощью схемы Горнера:

Если $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})(x-a)$

| | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | … | $P_{n-1}$ | $P_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $b_0=p_0$ | $b_1=p_1+b_0\cdot a$ | $b_2=p_2+b_1\cdot a$ | $b_3=p_3+b_2\cdot a$ | | $b_{n-1}=p_{n-1}+b_{n-2}\cdot a$ | $b_n=p_n+b_{n-1}\cdot a$ |

*Пример 1.* Дано: $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 41x^2 + 32x - 60 = 0$. Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm5; \pm6; \pm10; \pm12; \pm15; 20; \pm30; \pm60$, но это очень большое количество делителей, поэтому можно воспользоваться тем, что если сумма коэффициентов равна 0, то один из корней 1.

1-5-9+41+32-60=0 $\Rightarrow$ 1 – корень.

| | 1 | -5 | -9 | 41 | 32 | -60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -4 | -13 | 28 | 60 | 0 |
| 2 | 1 | -2 | -17 | -6 | 20 | - |
| 3 | 1 | -1 | -16 | -20 | 0 | |
| 4 | 1 | 3 | -4 | 0 | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 4 | 4 | 0 | | |

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x+4x+4)=0$$

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x+2)^2=0$$

x-1=0, или x-3=0, или x-5=0, или $(x+2)^2=0$,
x=1. x=3. x=5. x=-2.

*Ответ:* 1; 3; 5; -2.

*Пример 2.* $x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6=0$

Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm6$.

| | 1 | -1 | -8 | 14 | 1 | -13 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | -8 | 6 | 7 | -6 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | -7 | -1 | 6 | 0 | |
| 1 | 1 | 2 | -5 | -6 | 0 | | |
| -1 | 1 | 1 | -6 | 0 | | | |

$$(x-1)^3(x+1)(x^2+x-6)=0$$

$$(x-1)^3(x+1)(x+3)(x-2)=0$$

$(x-1)^3=0$, или x+1=0, или x+3=0, x-2=0,
x=1. x=-1. x=-3. x=2.

*Ответ:* 1; -1; -3; 2.

*Пример 3.* Решить уравнение: $x^3 - 5x + 4 = 0$

Определим корни многочлена третьей степени:

$\frac{p}{q}: \pm 1; \pm 2; \pm 4$

f(1) = 1 – 5 + 4 = 0

Одним из корней является x = 1

| | 1 | 0 | – 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | – 4 | 0 |

$x^3 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 4) = 0$

x-1=0, или $x^2 + x - 4=0$

x=1. D = 1 + 16 = 17

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: 1; $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

*Пример 4.* Дано: $6x^4-29x^3-89x^2-19x+35=0$

Решение. Делители свободного числа: $\pm1; \pm5; \pm7; \pm35$.

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнения:

| | 6 | -29 | -89 | -19 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | -23 | -112 | -131 | $\neq 0$ |
| -1 | 6 | -35 | -54 | 35 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 1 | -84 | -439 | $\neq 0$ |
| 7 | 6 | 13 | 2 | -5 | 0 |

Итак, $6x^4-29x^3-89x^2-19x+35=(x+1)(x-7)(6x^2+7x-5)=0$,
$x+1=0$ или $x-7=0$ или $6x^2+7x-5=0$

$x_1=-1$, $x_2=7$, $x_{3,4}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{12}=-\frac{5}{3};\ \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{-1; 7; -\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

*Пример 5.* Решить уравнение: $x^5+5x-42=0$

Решение. Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm6; \pm7; \pm14; \pm21$;

Находим по схеме Горнера целочисленные решения уравнений:

| | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | -42 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 6 | $\neq 0$ | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | $\neq 0$ | |
| -2 | 1 | -2 | 4 | -8 | 21 | $\neq 0$ | |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 21 | 0 | Корень |

$x^4+2x^3+4x^2+8x+21=0$

Делители свободного числа: $\pm1; \pm21$

| | 1 | 2 | 4 | 8 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 3 | 7 | 15 | 36 |
| -21 | 1 | -19 | 403 | -8455 | 177576 |
| 21 | 1 | 23 | 487 | 10235 | 214956 |

Ответ: $x=2$.

*Пример 6.* Дано: $x^4-8x+63=0$

Решение. Делители свободного числа: $\pm1; \pm63$

Решаем по схеме Горнера:

| | 1 | 0 | 0 | -8 | 63 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 1 | -1 | -7 | 70 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -7 | 70 |
| -63 | 1 | 63 | -3969 | Не корень | |
| 63 | 1 | 63 | 3969 | Не корень | |

Ответ: решений нет.

*Пример 7.* Решить уравнение: $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$

*Решение*. Делители свободного числа: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12$;

По схеме Горнера находим целочисленные решения уравнения:

| | 1 | -4 | -13 | 28 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -3 | -16 | 12 | 24 | $\neq 0$ |
| 2 | 1 | -2 | -17 | -6 | 0 | Корень |
| 3 | 1 | -1 | -16 | -20 | $\neq 0$ | |
| -3 | 1 | -7 | 8 | 4 | 0 | Корень |

Уравнение принимает вид: $(x-2)(x+3)(x^2-5x-2)=0$

$x-2=0$ или $x+3=0$ или $x^2-5x-2=0$

$x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

*5. Метод неопределенных коэффициентов.* Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения.

1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.

2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.

3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

Пример. Разложить на множители многочлен $3x^3-x^2-3x+1$.

Решение. Поскольку многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителей, то будем искать многочлены $(x-p)$ и $(ax^2+bx+c)$ такие, что справедливо равенство $3x^3-x^2-3x+1=(x-p)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-ap)x^2+(c-bp)x-pc.$ Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} a=3; \\ b-ap=-1; \\ c-bp=-3; \\ -pc=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $a$=3, $p$=1, $b$=2, $c$= –1 (берём одно из трёх, полученных значений $p$=1;-1;$\frac{1}{3}$, и соответственно находим значения $b$ и $c$). Итак, многочлен $3x^3-x^2-3x+1$ разлагается на множители: $3x^3-x^2-3x+1=(x-1)(3x^2+2x-1)$, а далее разложить на множители квадратный трёхчлен по известной формуле.

а) Методом неопределенных коэффициентов разложить на множители многочлен $5x^3-16x^2+13x-2$.

б) Методом неопределенных коэффициентов разложить дробь $\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}$ в сумму простых (элементарных) дробей.

## УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

1. Алгебраическое уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ называют возвратным, если его коэффициенты, одинаково удалённые от начала и от конца уравнения, равны между собой.

Например: $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$, $a_0 = a_3 = 1, a_1 = a_2 = -2$;

$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$, $a_0 = a_4 = 2$, $a_1 = a_3 = -3$, $a_2 = 5$;

При решении возвратных уравнений третьей степени, *т.е. уравнений вида* $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, группируют первый и последний, второй и третий члены, выполняют разложение на множители и далее решают, используя условие равенства произведения нулю.

Решить уравнения:

а) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;

в) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;

г) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

При решении возвратных уравнений четвёртой степени, т.е. уравнений вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, делят обе части уравнения на $x^2$ ($x = 0$ не является корнем этого уравнения), группируют члены равноудалённые от концов уравнения, выносят за скобки общий множитель, затем вводят новую переменную $t$, положив $t = x + \frac{1}{x}$. Решают, полученное квадратное уравнение относительно $t$, а затем возвращаются к переменной $x$.

Решить уравнения:

а) $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$;

в) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;

г) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$.

Симметрическое уравнение является частным случаем возвратного уравнения.

2. Уравнение вида $P(x, y) = 0$ называется однородным уравнением степени $k$ относительно $x$ и $y$, если $P(x, y)$ – однородный многочлен степени $k$. Однородное уравнение относительно $x$ и $y$ делением на $y^k$ (если $y = 0$ не является корнем уравнения) превращается в уравнение относительно неизвестного $t = \frac{x}{y}$.

Решить уравнения:

а) $(x^2 - x + 1)^3 + 2x^4(x^2 - x + 1) - 3x^6 = 0$;

б) $2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2 = 0$.

3. Однородные системы.

<u>Определение.</u> Система двух уравнений с двумя неизвестными называется однородной системой порядка $n$ ($n$ - натуральное число), если она имеет вид

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n = c, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_ny^n = d. \end{cases}$$

Однородные системы проще всего решаются следующим образом. Из первого уравнения системы, предварительно умноженного на $d$ вычитают второе уравнение, предварительно умноженное на $c$. В результате получается однородное уравнение, метод решения которого уже рассмотрен ранее.

Рассмотрим ряд примеров.

1) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+xy+y^2=8, \\ x^2-2xy+3y^2=9. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы, предварительно умноженного на $9$ второе уравнение, предварительно умноженное на $8$. В результате будем иметь $10x^2+25xy-15y^2=0$ или $2x^2+5xy-3y^2=0$.

Таким образом, исходная система равносильна такой системе $\begin{cases} 2x^2+xy+y^2=8, \\ 2x^2+5xy-3y^2=0. \end{cases}$

Заметим, что $y \neq 0$ и, пользуясь этим, разделим второе уравнение на $y^2$. Будем иметь $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+5\left(\dfrac{x}{y}\right)-3=0.\ (*)$

Введя обозначение $t=\dfrac{x}{y}$, получим уравнение $2t^2+5t-3=0$, решениями которого являются $t_1=\dfrac{1}{2}, t_2=-3$. Следовательно уравнение $(*)$ равносильно совокупности двух уравнений $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{x}{y}=-3$. Отсюда следует, что исходная система равносильна совокупности систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2+xy+y^2=8, \\ y=2x; \end{cases} (a) \\ \begin{cases} 2x^2+xy+y^2=8, \\ y=-3y. \end{cases} (б) \end{array}\right.$.

Решив системы $(a)$ и $(б)$ методом подстановки получим пары чисел, являющиеся решениями данной системы уравнений $(-1;-2); (1;2); \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3-3y^3=2, \\ x^2y-2xy^2=1. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе, предварительно умноженное на $2$ и получим $x^3-2x^2y+4xy^2-3y^3=0$.

Очевидно, что $y \neq 0$ и, пользуясь этим, разделим последнее уравнение на $y^3$, получим $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+4\left(\dfrac{x}{y}\right)-3=0.$ Введя подстановку $t=\dfrac{x}{y}$, получим уравнение $t^3-2t^2+4t-3=0$. Составим список целых делителей свободного члена многочлена, стоящего в левой части последнего уравнения: $-1, 1, -3, 3$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что число $t=1$ является корнем этого многочлена и тогда его можно разложить на множители $t^3-2t^2+4t-3=(t-1)(t^2-t+3)$. Так как квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то уравнение $t^3-2t^2+4t-3=0$ имеет единственный действительный корень $t=1$. Таким образом, исходная система оказывается равносильной системе $\begin{cases} x^3-3y^3=2, \\ x=y. \end{cases}$. Решением этой системы является пара $(-1;-1)$.

3) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$. Для решения воспользуемся очевидным равенством: $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$. Исходная система примет вид $\begin{cases} (x^2+y^2)^2-x^2y^2=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$ или $\begin{cases} (x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

Имеем $\begin{cases} (x^2+y^2+xy)=13, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$. Применив для решения последней системы сложение уравнений системы и их вычитание, получим $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$. Решением последней системы будут следующие пары чисел: $(3;1)$; $(1;3)$; $(-3;-1)$; $(-1;-3)$.

4. Симметрические системы.

*Определение 1.* Функция $F(x,y)$ называется симметрической, если аналитическое выражение, задающее эту функцию, не изменяется при замене переменной $x$ на переменную $y$, а переменной $y$ на переменную $x$.

Приведём примеры симметрических функций двух переменных $F(x,y)=\sqrt{x+y}+2xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $F(x,y)=x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$.

*Определение 2.* Симметрической системой двух уравнений с двумя неизвестными называется система вида, $\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0, \end{cases}$ где $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ - симметрические функции двух переменных. Аналогично вводится определение симметрической системы трёх уравнений с тремя неизвестными и так далее.

Метод решения симметрических систем основан на том, что симметрические уравнения переменных $x$ и $y$ могут быть выражены симметрическими уравнениями относительно $x+y$ и $xy$, а для этого следует ввести подстановки $x+y=u,\ xy=v$.

Перейдём к решению конкретных систем уравнений.

1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+xy+y=23. \end{cases}$.

Это симметрическая система. Введём подстановки $x+y=u,\ xy=v$. Преобразовав первое уравнение системы к виду $(x+y)^2-2xy=34$ и использовав подстановки, мы сведём исходную систему к такой системе $\begin{cases} u^2-2v=34, \\ u+v=23. \end{cases}$ $(*)$

Решим эту систему подстановкой, для чего из второго уравнения выразим $v: v = 23 - u$, и подставим это выражение в первое уравнение системы. Получим $u^2 + 2u - 80 = 0$, откуда $u_1 = 8, u_2 = -10$. Найдём соответствующие значения $v$, будем иметь $v_1 = 15, v_2 = 33$. Итак, решением системы $(*)$ являются две пары чисел, а именно $(8;15); (-10;33)$

Таким образом, исходная система оказывается равносильной совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 33. \end{cases} \end{array}\right.$

Решением первой системы являются пары чисел $(3;5); (5;3)$ , а вторая система не имеет действительных решений.

2) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 + x^3y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$. Введём подстановки $x + y = u, xy = v$. Преобразуем первое уравнение системы, учитывая, что $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = (x+y)((x^2 + y^2 + 2xy) - 3xy) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy)$.

Итак, учитывая подстановки, будем иметь $\begin{cases} u(u^2 - 3v) + v^2 = 17, \\ u + v = 5, \end{cases}$ или $\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5. \end{cases}$. Эта система также стала симметрической относительно $u$ и $v$, и решать её можно было бы, введя новые подстановки, но мы решим её методом подстановки. Подставив в первое уравнение вместо $u$ выражение $(5 - v)$, получим $\begin{array}{l} (5-v)^3 - 3(5-v)v + v^3 = 17, \\ 125 - 75v + 15v^2 - v^3 - 15v + 3v^2 + v^3 = 17, \\ v^2 - 5v + 6 = 0. \end{array}$

Корнями этого уравнения являются числа $v_1 = 2, v_2 = 3$. Тогда $u_1 = 3, u_2 = 2$.

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3. \end{cases} \end{array}\right.$. Первая система имеет решением две пары чисел $(1;2); (2;1)$ , а вторая система действительных решений не имеет.

Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2, \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

5. Решите уравнения в целых числах:

а) $(x - 2)(xy + 4) = 1$;

б) $x^2 - xy - x + y = 1$;

в) $2x^2 + xy = x + 7$;

г) $x^2 - 3xy = x - 3y + 2$.

## ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ.

1. **Задачи на проценты, смеси и сплавы**.

Задачи на изменение концентрации одного вещества.

1. В 100г раствора имеется 1% соли. После испарения стало 2% соли. Масса 2% раствора соли равна? (задача на выпаривание).

Первый способ.

Обозначим за х количество выпаренной воды.

| Было (гр) | Изменения (гр) | Стало (гр) -- % |
|---|---|---|
| Раствор 100 | - х | 100-х -- 100% |
| Соль 100*0,01=1 | | 1 -- 2% |

Зависимость в столбце «стало» между величинами, выраженными в граммах, и величинами, выраженными в процентах, является прямо пропорциональной. Составим и решим пропорцию.

$$\frac{10-x}{1}=\frac{100}{2}$$

х=50.

50граммов воды испарилось следовательно стало 100-50=50 граммов раствора.

Ответ: 50 гр.

Второй способ.

Обозначим за х количество оставшегося раствора.

| | Изменяемая часть | Неизменяемая часть |
|---|---|---|
| Раствор (гр) | Вода (% ) | Соль (%) |
| Было 100 | 99 | 1 |
| Стало х | 98 | 2 |

Зависимость между величинами первого столбца и величинами неизменяемой части является обратно пропорциональной. Составим и решим пропорцию.

$$\frac{x}{100}=\frac{1}{2}$$

х=50.

50 граммов раствора стало.

*Ответ*: 50 гр.

2. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды? (задача на содержание чистого вещества).

Первый способ. ( через две пропорции).

Масса чистого вещества в руде и металле одинакова. Количество чистого вещества обозначим - х, а количество полученного металла - у.

| | Руда | | Металл | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | тонны | % | | тонны | % |
| Смесь | 24 | 100 | Смесь | у | 100 |

| Чистое вещество | х | 60 | Чистое вещество | х | 96 |
|---|---|---|---|---|---|

Зависимость между смесью и чистым веществом, выраженными в тоннах и процентах, в руде и металле является прямо пропорциональной. Составим две пропорции и решим их, учитывая, что масса чистого вещества в руде и металле одинакова.

1) $\frac{24}{x} = \frac{100}{60}$ 2) $\frac{y}{x} = \frac{100}{96}$

Из первой пропорции найдём $x = (24 \cdot 60) \div 100$ и подставив во вторую пропорцию найдём у

$$\frac{y}{(24 \cdot 60) \div 100} = \frac{100}{96}$$

у=15.

15 тонн металла получится.

Ответ: 15т.

Второй способ.

Обозначим за х количество полученного металла.

| | Изменяемая часть | Неизменяемая часть |
|---|---|---|
| Смесь (т) | Примеси (%) | Чистый металл (%) |
| Было 24 | 40 | 100-40=60 |
| Стало х | 4 | 100-4=96 |

Зависимость между величинами первого столбца и величинами неизменяемой части является обратно пропорциональной. Составим и решим пропорцию.

$$\frac{24}{x} = \frac{96}{60}$$

х=15, 15 тонн металла получится.

Ответ: 15т.

**Задачи на смешивание (смешивают два вещества получают третье).**

3. Кусок сплава меди и цинка в 36кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60% меди?

Первый способ.

Обозначим за х массу меди которую нужно добавить.

| Было (кг) | Изменения (кг) | Стало (кг) -- % |
|---|---|---|
| сплав 36 | + х | 36+х -- 100% |
| медь 36*0,45 | + х | 16,2+х -- 60% |

Зависимость в столбце «стало» между величинами, выраженными в кг, и величинами, выраженными в процентах, является прямо пропорциональной.

Составим и решим пропорцию.

$$\frac{16{,}2 + x}{36 + x} = \frac{60}{100}$$

х=13,5.

13,5кг меди надо добавить.

Ответ: 13,5кг.

Второй способ.

Обозначим за x массу меди, которую нужно добавить.

| | Изменяемая часть | Неизменяемая часть |
|---|---|---|
| Сплав (кг) | медь(% ) | цинк(%) |
| Было 36 | 45 | 100-45=55 |
| Стало 36+x | 60 | 100-60=40 |

Зависимость между величинами первого столбца и величинами неизменяемой части является обратно пропорциональной. Составим и решим пропорцию.

$$\frac{36}{36+x}=\frac{40}{55}$$

x=13,5.

13,5кг меди надо добавить.

Ответ: 13,5кг.

<u>Третий способ. Правило «креста».</u>

<u>36кг</u> 45% 100%-60%=<u>40%</u>

60%

<u>xкг</u> 100% 60%-45%=<u>15%</u>

Составим и решим пропорцию.

$$\frac{36}{x}=\frac{40}{15}$$

x=13,5.

13,5 кг меди надо добавить.

*Ответ*: 13,5кг.

4. Имеется два сплава золота и серебра, в первом количество этих металлов находится в отношении 2:3, во втором – в отношении 3:7. Сколько необходимо взять каждого сплава, чтобы получить 8кг нового сплава, в котором количество золота и серебра были в отношении 5:10?

<u>Первый способ. Правило «креста».</u>

Первый сплав $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{30}$

$\frac{5}{15}$

Второй сплав $\frac{3}{10}$ $\frac{1}{15}$

Составим отношение.

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{15}}=\frac{1}{2}$$

Первого сплава 1 часть, второго сплава 2 части, значит 8кг составит 3части.

Первого сплава $8\cdot\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$ кг, а второго сплава $8\cdot\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$ кг.

Ответ: $2\frac{2}{3}$ кг, $5\frac{1}{3}$ кг.

Второй способ.

Пусть количество первого сплава - хкг, тогда количество второго сплава 8-х (кг)

| | Сплав (кг) | Золото (кг) |
|---|---|---|
| Первый сплав | x | $\frac{2}{5}x$ |
| Второй сплав | 8-x | $\frac{3}{10}(8-x)$ |
| Третий сплав | 8 | $\frac{5}{15}\cdot 8$ |

Так как первый и второй сплавы смешали и получили третий сплав, то используя данные третьего столбца составим уравнение и решим его.

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}\cdot(8-x)=\frac{8}{3}$$

$$x=2\frac{2}{3}$$

Первого сплава $2\frac{2}{3}$ кг, а второго сплава $8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$ кг.

Ответ: $2\frac{2}{3}$ кг, $5\frac{1}{3}$ кг.

**Задачи на последовательное изменение величины на определённое количество процентов, изменение величины в процентах.**

5. После двух последовательных повышений зарплата увеличилась в $1\frac{7}{8}$ раза. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение по количеству процентов было вдвое больше, чем первое?

Обозначим за а зарплату, а за х количество процентов (выраженное дробью) на которое повысилась зарплата первый раз.

| | Зарплата |
|---|---|
| Было | а |
| Изменение 1 | на х |
| Изменение 2 | на 2х |
| Стало | $1\frac{7}{8}a$ |

Составим и решим уравнение.

$$a\cdot(1+x)\cdot(1+2x)=1\frac{7}{8}a$$

Учитывая условие задачи х=0,25, значит увеличение составляет 25%.

Ответ: на 25%.

6. Цена товара в первый месяц возросла на 20% , а во второй месяц снизилась на 20%. На сколько процентов и как изменилась цена товара?

Обозначим за х первоначальную цену товара.

| | Цена товара |
|---|---|
| Было | $x$ |

| | |
|---|---|
| Изменение 1 | $\cdot 1{,}2$ |
| Изменение 2 | $\cdot 0{,}8$ |
| Стало | $x \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8$ |

Пользуясь правилом найдём изменение величины в процентах

$$\frac{x \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 - x}{x} \cdot 100\% = -4\%$$

Цена уменьшилась на 4%.

Ответ: уменьшилась на 4%.

7. Рабочий день уменьшился с 8 часов до 7. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата выросла на 5%.

Обозначим за х заработную плату.

| | Заработная плата | Время | Производительность |
|---|---|---|---|
| было | $x$ | 8 | $\frac{x}{8}$ |
| стало | $x \cdot 1{,}05$ | 7 | $\frac{1{,}05x}{7}$ |

Пользуясь правилом найдём изменение величины в процентах

$$\left(\frac{1{,}05x}{7} - \frac{x}{8}\right) \div \frac{x}{8} \cdot 100\% = 20\%$$

Повысить производительность труда на 20%.

Ответ: на 20%.

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Имеется 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды. Сколько кг воды надо выпарить, чтобы оставшаяся масса содержала 25% целлюлозы?
2. Из 38 тонн сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получается 30 тонн сырья первого сорта. Каков процент примесей в сырье первого сорта?
3. Из 22кг свежих грибов получается 2,5кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?
4. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22кг свежих?
5. Чтобы получить 95% серную кислоту, надо к 50гр 80% серной кислоты добавить 100% серную кислоту. Какова масса 100% серной кислоты, которую надо добавить?
6. В растворе содержится 40% соли. Если добавить 120г соли, то в растворе будет содержаться 70% соли. Найти массу соли в первоначальном растворе.
7. К 15л 10% раствора соли добавили 5% раствор соли и получили 8% раствор. Какое количество литров 5% раствора добавили?
8. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140т стали с содержанием никеля 30%?
9. При продажной стоимости товара 2,2 тыс. тг. за 1кг продовольственный магазин получает 10% прибыли. Если продать этот товар по 1,8 тыс. тг. за 1кг,

то магазин несёт убытки в сумме 43 тыс. тг. Сколько кг этого товара было в магазине?

10. На сколько процентов следует увеличить длину радиуса круга, чтобы площадь круга стала больше на 96%?

11. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года – 726 изделий ежемесячно.

12. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили ещё на 15% и, наконец, после пересчёта произвели снижение ещё на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

2. *Задачи на движение*.

1) Из города А в город В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 15 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 90 км/ч, в результате чего прибыл в В, одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 54 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

2) Из города А в город В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 33 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 22 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В, одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

3) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 78 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

4) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 126 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 5 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 5 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

5) Два велосипедиста одновременно отправились в 117-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

6) Два велосипедиста одновременно отправились в 110- километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

7) Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
8) Моторная лодка прошла против течения реки 80 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
9) Моторная лодка прошла 54 км по течению реки и 42 км против течения за то же время, что она проходит 96 км в стоячей воде. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 3 км/ч.
10) Турист проплыл на байдарке 24 км по озеру и 9 км против течения реки за то же время, какое понадобилось ему, чтобы проплыть по течению 45 км. С какой скоростью плыл турист по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

*3. Задачи на совместную работу.*

1) Заказ на 224 детали первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 2 детали больше?
2) Заказ на изготовление 154 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?
3) На изготовление 21 детали первый рабочий затрачивает на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 35 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?
4) На изготовление 63 деталей первый рабочий затрачивает на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 72 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?
5) Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 288 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?
6)Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 396 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?
7) Две машинистки получили для перепечатки рукопись. После 2 часов совместной работы одна из них получила другое задание, и вторая, оставшись одна, закончила рукопись за 1 ч 20 мин. За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, если второй на это понадобилось бы на 1 ч 10 мин больше, чем первой?
8) Урожай с участка сначала убирал один комбайн. Через 4 ч после начала работы к нему присоединился второй, и, проработав совместно 8 ч, они закончили уборку урожая с участка. За сколько часов мог бы убрать урожай с

участка каждый комбайн, работая отдельно, если известно, что первому понадобилось бы на 8 ч больше, чем второму?
9) Моторная лодка прошла 54 км по течению реки и 42 км против течения за то же время, что она проходит 96 км в стоячей воде. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 3 км/ч.
10) Турист проплыл на байдарке 24 км по озеру и 9 км против течения реки за то же время, какое понадобилось ему, чтобы проплыть по течению 45 км. С какой скоростью плыл турист по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

## ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Преобразуйте данное выражение в произведение:

$\sqrt{3} + tg\alpha$;

$1 + sin\alpha + cos\alpha$;

$tg9^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ - tg27^\circ$;

$sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)$.

2. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Вычислите:

$16sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{3\alpha}{2}$, если $cos\alpha = \frac{3}{4}$;

$sin^2\alpha + sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

$cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7}$;

$\frac{1}{2sin10^\circ} - 2sin70^\circ$.

3. Формулы универсальной подстановки:

$$\sin2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \cos2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Вычислите:

$sin4\alpha + cos4\alpha \cdot ctg2\alpha$, если $tg2\alpha = 4$;

$sin^4\alpha - cos^4\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

4. Дополнительные формулы:

$$\sin\alpha\cdot\sin\left(60^\circ-\alpha\right)\cdot\sin\left(60^\circ+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha,$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\left(60^\circ-\alpha\right)\cdot\cos\left(60^\circ+\alpha\right)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha,$$

$$tg\alpha\cdot tg\left(60^\circ-\alpha\right)\cdot tg\left(60^\circ+\alpha\right)=tg3\alpha,$$

$$ctg\alpha\cdot tg\left(60^\circ-\alpha\right)\cdot ctg\left(60^\circ+\alpha\right)=ctg3\alpha.$$

Упростить выражение:

$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$

$\cos 45^\circ\cdot\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$

$\cos 12^\circ\cdot\cos 24^\circ\cdot\cos 36^\circ\cdot\cos 48^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 72^\circ\cdot\cos 84^\circ$

## ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

1. Найдите область определения функции:

$y=\frac{\sqrt{5x-6}}{\sqrt{7x-14}}$;

$y=\sqrt{\frac{5x-6}{7x-14}}$;

$y=\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\sqrt{6-x}$;

$y=\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$.

2. Найдите область значений функции:

$y=3x^2-6x+1$;

$y=\frac{5}{x-2}$;

$y=\frac{2}{x^2+2}$;

$y=\sqrt{3x^2-6x+4}$ .

*Построение графиков функций, содержащих знак модуля.*

1. Для построения графика функции $y=|f(x)|$ надо сначала построить график функции $y=f(x)$ , а затем ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, отразить относительно оси абсцисс. Полученная в верхней части полуплоскости кривая и будет графиком функции $y=|f(x)|$.

2. Функция вида $y=f(|x|)$ – чётная, т.к. $f(|-x|)=f(|x|)$, поэтому построение её графика сводится к построению графика функции $y=f(x)$ *при* $x\geq 0$ и последующим отражением относительно оси ординат.

3. Построение графика функции $y=|f(|x|)|$:

- Построить график функции $y=f(x)$ *при* $x\geq 0$;
- Отобразить, построенную часть графика симметрично относительно оси ординат;

- Участки, полученного графика, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить в верхнюю полуплоскость.

Построить графики функций:
$y = |x^2 - x - 6|$; $y = |x|^2 - |x| - 6$; $y = \big|2 - |x|\big|$.

## ГЕОМЕТРИЯ.

*Опорные задачи планиметрии.*

1.Доказать, что высота равнобокой трапеции, опущенная из вершины меньшего основания, делит большее основание трапеции на отрезки, длина которых равна полусумме и полуразности длин оснований.

2. Доказать, что если диагонали равнобокой трапеции взаимноперпендикулярны, то ее высота равна средней линии.

3. Доказать, что если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен среднему геометрическому ее оснований.

4. Найти длину отрезка, отсекаемого диагоналями трапеции на средней линии, если основания трапеции равны $a$ и $b$.

5. Доказать, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон выпуклого четырехугольника является параллелограммом и вычислить его площадь, если площадь данного четырехугольника равна $S$ .

6. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

7. Если в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, то биссектрисы всех его внутренних углов пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

8. В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$ ) вписана окружность с центром в точке $O$. Доказать, что треугольники $OBA$ и $OCD$ - прямоугольные.

9. Вычислить радиус окружности, вписанной в трапецию, если точка касания окружности делит боковую сторону трапеции на отрезки длинной $p$ и $q$.

10. Если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

*Следствия из теорем синусов и косинусов.*

1. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение одной из них на проекцию другой (случай, когда угол, лежащий против неизвестной стороны острый).

2. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон плюс удвоенное произведение одной из них на проекцию другой (случай, когда угол, лежащий против неизвестной стороны тупой).

3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

4. Отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно 2R, где R - радиус окружности, описанной около этого треугольника.

*Метод координат.*

1. Уравнение прямой в общем виде $ax + by = c$.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки A$(x_1; y_1)$ и B$(x_2; y_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

4. Уравнение прямой в отрезках $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}} = 1$, где a – отрезок на ос*и* $0x, b$ – *отрезок на оси* $0y$.

5. Уравнение прямой, заданной точкой A$(x_1; y_1)$ и направляющим вектором $\vec{p}(\alpha; \beta)$ $\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta}$.

6. Уравнение прямой, заданной точкой A$(x_1; y_1)$ и вектором нормали $\vec{n}(a; b)$, $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

7. Расстояние $(d)$ от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $(ax + by + c = 0)$вычисляется по формуле $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8. Косинус угла между прямыми $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ вычисляют по формуле $cos\varphi = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

9. Условие параллельности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ .

10. Условие перпендикулярности прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

## Литература


1. Внеклассная работа в школе. Отдыхаем с математикой, «Учитель» 2006г. Волгоград.
2. Занимательные дидактические материалы по математике. Сборник заданий /автор-составитель. В.В. Трошин – Глобус, 2008.
3. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). Издание 3-е, стереотипное. – М.: МЦНМО, 2006.
4. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5-7 кл. – М.: Просвещение, 2005.
5. Соловейчик И.Л. «Я иду на урок математики», Пособие для учителя математики «Первое сентября» 2001 г
6. Фарков А.В. Математические олимпиады. 5-6 классы. – М.: Издательство «Экзамен», 2006.
7. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986.
8. Галкин Е.В. Задачи логического характера. — М.: Просвещение, 1996.
9. Мочалов Л.П. 400 игр, головоломок и фокусов - М: НТЦ «Университетский», 2000.
10. Оре О. Графы и их применение — М.: Мир, 1965.
11. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры — М: Просвещение, 1990.
12. Чулков П.В. Задачи па математике в 5-6 классе — М: Издат-школа, 1997.
13. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку. — М.: Просвещение, 1993.
14. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. — М.: МИРОС, 1992.
15. Шапиро И.М. «Использование задач с практическим содержанием в преподовании математики». Москва Просвещение» 1990г.
16. Сборник заданий PIZA. г. Усть-Каменогорск 2012 г.
17. Ткачева М.В. Домашняя математика. Книга для учащихся 8 класса общеобразовательных учебных заведений. – М.: Просвещение 1994.
18. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Москва «Просвещение» 1995.
19. Алгебра 8 класс задачник. А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская. Москва 2000.
20. Алгебра 9 класс задачник. А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская. Москва 2000.
21. Геометрия. Планиметрия в тезисах и решениях. Павлов А.Н.. Москва 2005.
22. Опорные задачи планиметрии. Л.А. Осипенко, Е.Э. Стацевичуте. Иркутск 2010.

**СОДЕРЖАНИЕ**